

## *Esempi svolti relativi al capitolo 5*

### **Effetti del secondo ordine in presenza di carico assiale**

5.1	Esempio 5.1 – Colonna di lunghezza 5 m in presso-flessione retta (fig. A5.1)	A5.4
5.1.1	Dati del problema:	A5.4
5.1.2	Calcoli preliminari	A5.4
5.1.3	Metodo della rigidezza nominale	A5.6
5.1.4	Metodo della curvatura nominale	A5.9
5.1.5	Verifica	A5.9
5.1.6	Confronto con il metodo generale	A5.10
5.2	Esempio 5.2 – Colonna di lunghezza 8 m in presso-flessione retta (fig. A5.4)	A5.12
5.2.1	Dati del problema	A5.12
5.2.2	Calcoli preliminari	A5.12
5.2.3	Metodo della rigidezza nominale	A5.14
5.2.4	Metodo della curvatura nominale	A5.15
5.2.5	Verifica della sezione di incastro	A5.16
5.3	Esempio 5.3 – Colonna di lunghezza 5 m sollecitata da forza assiale e forza trasversale (fig. A5.5)	A5.17
5.3.1	Dati del problema	17
5.3.2	Calcoli preliminari	A5.17
5.3.3	Metodo della rigidezza nominale	A5.18
5.3.4	Metodo della curvatura nominale	A5.20
5.3.5	Verifica della sezione di incastro	A5.21
5.3.6	Confronto con il metodo generale	A5.22
5.4	Esempio 5.4 – Colonna di lunghezza 8 m sollecitata da forza assiale eccentrica e forza trasversale (fig. A5.8)	A5.23
5.4.1	Dati del problema	A5.23
5.4.2	Calcoli preliminari	A5.23
5.4.3	Metodo della rigidezza nominale	A5.25
5.5	Esempio 4bis	A5.27
5.5.1	Metodo della curvatura nominale	A5.28
5.5.2	Verifica della sezione di incastro	A5.28

5.6	Esempio 5.5 – Colonna di lunghezza 6 m sollecitata in presso flessione deviata (fig. A5.9) .....	A5.29
5.6.2	Calcoli preliminari .....	A5.31
5.6.3	Pressoflessione con rotazione intorno all'asse z .....	A5.31
5.6.4	Pressoflessione con rotazione intorno all'asse y .....	A5.33
5.6.5	Verifica delle condizioni per l'ammissibilità delle verifiche separate .....	A5.34
5.7	Esempio 6 – Colonna di lunghezza 6 m sollecitata in presso flessione deviata (fig. A5.10) .....	A5.35
5.7.1	Dati del problema .....	A5.35
5.7.2	Calcoli preliminari .....	A5.35
5.7.3	Determinazione delle sollecitazioni totali monoassiali a stato limite ultimo. ....	A5.37
5.7.4	Verifica biassiale .....	A5.38
5.8	Esempio 7 – Verifica di un pilastro inserito in una struttura .....	A5.38
5.8.1	Metodo della curvatura nominale .....	A5.39
5.8.2	Metodo della rigidezza nominale .....	A5.41
5.8.3	Verifica .....	A5.41
5.8.4	Sintesi degli esempi sviluppati .....	A5.42



Gli esempi trattano casi di colonne incastrate alla base e libere in alto, sollecitate da carichi assiali eccentrici e/o associati a forze trasversali. Negli esempi 1, 2, 3 e 4 la forza assiale è contenuta in un piano di simmetria (presso-flessione retta); negli esempi 5 e 6 si tratta di presso flessione deviata. L'esempio 7 riguarda una colonna inserita in una struttura.

Gli esempi sono svolti applicando i metodi della rigidezza nominale e della curvatura nominale. In due casi viene riportata, per confronto, l'applicazione del metodo generale. In ogni caso l'armatura viene data: questo è il risultato di tentativi sviluppati a priori aumentando l'armatura richiesta dalle sollecitazioni del primo ordine fino ad ottenere un valore soddisfacente. Gli esempi riportati sono verifiche della compatibilità dei dati con le sollecitazioni compressive del primo e del secondo ordine. In tutti gli esempi l'acciaio è B450C con  $f_{yk} = 450 \text{ N/mm}^2$  e  $f_{yd} = 391 \text{ N/mm}^2$ .

Negli esempi non viene presa in conto l'incertezza sul punto di applicazione della forza assiale di cui al punto [6.1(4)] dell'EC2 in quanto trascurabile a fronte delle altre eccentricità.

### 5.1 Esempio 5.1 – Colonna di lunghezza 5 m in presso-flessione retta (fig. A5.1)

#### 5.1.1 Dati del problema:

Sezione quadrata di lato  $h = 400 \text{ mm}$ , armata simmetricamente con  $4 \phi 16 \text{ mm}$  su ciascun lembo con  $d' = 40 \text{ mm}$

$$N_{Ed} = 400 \text{ kN con eccentricità } e = 0,20 \text{ m; } N_{0Eqp} = 200 \text{ kN}$$

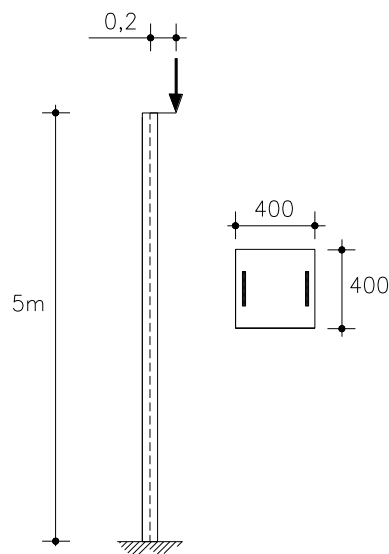
Calcestruzzo C30/37

$$f_{cd} = 17 \text{ N/mm}^2; E_{cm} = 33000 \text{ N/mm}^2; E_{cd} = E_{cm}/1,2 = 27500 \text{ N/mm}^2 [(5.20)].$$

#### 5.1.2 Calcoli preliminari

Lunghezza libera d'inflessione

$$\ell_0 = 2 \cdot 5 = 10 \text{ m}$$



**Figura A5.1** Esempio 5.1: schema della struttura.

Snellezza

$$\lambda = \ell_0 / (h / 3,46) = \frac{10}{\left( \frac{0,40}{3,46} \right)} = 86,5$$

Rapporto geometrico di armatura

$$\rho = \frac{2 \cdot 800}{400^2} = 0,01$$

Rapporto meccanico di armatura

$$\omega = \rho \frac{f_{yd}}{f_{cd}} = 0,01 \cdot \frac{391}{17} = 0,23$$

Sollecitazioni del primo ordine allo stato limite ultimo

$$N_{Ed} = 400 \text{ kN}; n_{Ed} = \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}} = \frac{400000}{400^2 \cdot 17} = 0,1471 \text{ N/mm}^2; M_{0Ed} = 4000 \cdot 0,2 = 80 \text{ kNm}$$

Sollecitazioni dovute a imperfezioni costruttive

Imperfezione di verticalità

$$\theta_i = 0,005 \cdot 2 / \sqrt{5} = 0,0045 \quad [5.1]$$

$$\theta_i \cdot \ell = 22,5 \text{ mm}$$

Momento dovuto alle imperfezioni

$$N_{Ed} \cdot (\theta_i \cdot \ell) = 9 \text{ kNm}$$

Momento totale del primo ordine allo SLU

$$M_{0Ed} = 80 + 9 = 89 \text{ kNm}$$

Sollecitazioni in esercizio, combinazione quasi permanente

$$N_{0Eqp} = 200 \text{ kN}; e = 0,2 \text{ m};$$

$$M_{0Eqp} = 200 \cdot 0,2 = 40 \text{ kNm}$$

Viscosità

$$\varphi_{(\infty, t_0)} = 2,5$$

$$\varphi_{ef} = \varphi_{(\infty, t_0)} \cdot (M_{0Eqp} / M_{0Ed}) = 2,5 \cdot (40 / 89) = 1,12 \quad [5.19]$$

Snellezza limite secondo la formula [5.13N]

$$\lambda_{lim} = 20 \cdot A \cdot B \cdot C / \sqrt{n}$$

Con i dati sopra riportati risulta

$$A = 1 / (1 + 0,2 \cdot \varphi_{ef}) = 1 / (1 + 0,2 \cdot 1,12) = 0,817$$

$$B = \sqrt{1 + 2\omega} = \sqrt{1 + 2 \cdot 0,23} = 1,20$$

$$C = 0,7$$

trattandosi di elemento strutturale non controventato (v. nota al punto [5.8.3.1])

$$\sqrt{n} = \sqrt{0,1471} = 0,3835$$

e quindi

$$\lambda_{\lim} = 20 \cdot 0,817 \cdot 1,20 \cdot 0,7 / 0,3835 = 35,8$$

Poiché  $\lambda = 86,5$  è maggiore di  $\lambda_{\lim}$ , occorre tenere conto degli effetti del secondo ordine.

### 5.1.3 Metodo della rigidezza nominale

#### *Svolgimento secondo il procedimento EC2*

La rigidezza nominale si calcola con la formula [(5.21)]:

$$EI = k_c E_{cd} I_c + k_s E_s I_s$$

Termine relativo all'acciaio

Essendo  $\rho = 0,01 > 0,002$ , per la [5.22] si pone  $k_s = 1$ , quindi:

$$E_s I_s = E_s \cdot 2A_s \cdot (h/2 - d')^2 = 200000 \cdot 2 \cdot 800 \cdot (200 - 40)^2 = 8,18 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

Termine relativo al calcestruzzo:

$$k_c = k_1 k_2 / (1 + \varphi_{ef})$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{f_{ck}}{20}} = \sqrt{\frac{30}{20}} = 1,22$$

$$k_2 = n_{Ed} \lambda / 170 = 0,1471 \cdot 86,5 / 170 = 0,0748$$

$$k_c = 1,22 \cdot 0,0748 / (1 + 1,12) = 0,043$$

$$k_c \cdot E_{cd} \cdot I_c = 0,043 \cdot 27500 \cdot \frac{400^4}{12} = 2,52 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

Sommando si ottiene:

$$EI = 2,52 \cdot 10^{12} + 8,18 \cdot 10^{12} = 10,70 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

Il carico critico euleriano fondato sulla rigidezza nominale risulta:

$$N_B = \pi^2 EI / \ell_0^2 = 9,86 \cdot (10,70 \cdot 10^{12}) / 10^8 = 1055 \text{ kN}$$

Essendo i valori di  $\beta$  nella [(5.28)] diversi a seconda del carico verticale ( $M$  uniforme) e imperfezioni geometriche ( $M$  triangolare), si calcolano i momenti totali parziali, ossia somma del primo e del secondo ordine, corrispondenti.

Carico verticale

$$M_{0Ed} = 80 \text{ kNm}; \beta = 1,23$$

Imperfezioni

$$M_{0Ed} = 9 \text{ kNm}; \beta = 0,82$$

I momenti totali (primo e secondo ordine) nei due casi valgono, con la [(5.28)]:

$$M_{Ed} = 80 \cdot \left[ 1 + \frac{1,23}{\frac{1055}{400} - 1} \right] = 140,0 \text{ kNm}$$

$$M_{Ed} = 9 \cdot \left[ 1 + \frac{0,82}{\frac{1055}{400} - 1} \right] = 13,5 \text{ kNm}$$

e, in totale:  $M_{tot} = 140,0 + 13,5 = 153,5 \text{ kNm}$

Il rapporto fra il momento totale e il momento del primo ordine risulta:  $153,5/89 = 1,72$

**Soluzione del problema con integrazione dell'equazione differenziale della linea elastica**

Indicando con  $y$  lo spostamento della sezione generica distante  $x$  dall'incastro e con  $f$  lo spostamento della sezione di sommità ( $x = \ell$ ), il momento flettente nella sezione generica si scrive:

$$M = -N_{Ed}(e + \theta\ell + f - y)$$

e l'equazione differenziale della linea elastica risulta:

$$EIy'' = N_{Ed}(e + \theta\ell + f - y)$$

Posto  $\alpha = \sqrt{\frac{N_{Ed}}{EI}}$

integrando due volte si ottiene:

$$y = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + e + \theta\ell + f$$

Le costanti  $C_1$  e  $C_2$  si determinano imponendo all'incastro ( $x = 0$ ) le condizioni:  $y = 0$  e  $y' = \theta$ .

Risulta:

$$C_1 = (\theta / \alpha); C_2 = -(e + \theta\ell + f)$$

La linea elastica è allora descritta dall'espressione:

$$y = \frac{\theta}{\alpha} \sin \alpha x + (e + \theta\ell + f) \cdot (1 - \cos \alpha x)$$

Per  $x = \ell$ , ossia in sommità, lo spostamento totale vale  $y = (\theta\ell + f)$ . Uguagliandolo al valore di  $y$  calcolato per  $x = \ell$ , si ottiene:

$$e + \theta\ell + f = \frac{e + (\theta / \alpha) \sin \alpha \ell}{\cos \alpha \ell}$$

e lo spostamento elastico vale:

$$f = \frac{e(1 - \cos \alpha \ell) + (\theta / \alpha) \sin \alpha \ell - \theta\ell \cos \alpha \ell}{\cos \alpha \ell}$$

Il momento totale è dato da

$$M_{Ed} = N_{Ed}(e + \theta\ell + f)$$

essendo i primi due termini nella parentesi le eccentricità assegnate e il terzo lo spostamento elastico. Ovvero, sostituendo l'espressione di  $f$  :

$$M_{Ed} = N_{Ed} \frac{e + (\theta / \alpha) \sin \alpha \ell}{\cos \alpha \ell}$$

Introducendo i dati del problema, gli sviluppi sono i seguenti:

$$\alpha = \sqrt{\frac{400000}{10,70 \cdot 10^{12}}} = 1,93 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$$

Quindi in successione risulta:

$$\alpha \ell = 1,93 \cdot 10^{-4} \cdot 0,5 \cdot 10^4 = 0,97; \sin \alpha \ell = 0,82; \cos \alpha \ell = 0,565$$

$$(\theta / \alpha) = 45 \cdot 10^{-4} / 1,93 \cdot 10^{-4} = 23,3 \text{ mm} = 0,0233 \text{ m}$$

$$\theta \ell = 22,5 \text{ mm} = 0,0225 \text{ m}$$

$$f = \frac{200 \cdot (1 - 0,565) + 23,3 \cdot 0,82 - 22,5 \cdot 0,565}{0,565} = 165,3 \text{ mm}$$

$$M_{Ed} = 400 \cdot (0,200 + 0,0225 + 0,165) = 400 \cdot 0,388 = 155 \text{ kNm}$$

o, con la seconda espressione:

$$M_{Ed} = 400 \cdot \frac{0,20 + 0,0233 \cdot 0,82}{0,565} = 155 \text{ kNm}$$

***Soluzione mediante il calcolo degli spostamenti della retta di azione della forza assiale***

Calcolo degli spostamenti trasversali

– Presso flessione

$$f_1 = \frac{N_{Ed} \cdot e \cdot \ell^2}{2EI} = \frac{400 \cdot 0,20 \cdot 10^6 \cdot 25 \cdot 10^6}{2 \cdot 10,7 \cdot 10^{12}} = 93,45 \text{ mm}$$

– Imperfezione geometrica  $\theta = 0,0045$  ;  $\theta \ell = 22,5 \text{ mm}$

$$s = 400000 \cdot \frac{5000^3}{3 \cdot 10,7 \cdot 10^{12}} \cdot 0,0045 = 7,0 \text{ mm}$$

– Coefficiente di amplificazione degli spostamenti

$$N_B = 1055 \text{ kN}$$

$$\frac{1}{1 - N_{Ed} / N_B} = \frac{1}{1 - (400 / 1055)} = 1,61$$

– Somma degli spostamenti flessionali e amplificazione della stessa:

$$(93,45 + 7,0) \cdot 1,61 = 162 \text{ mm} = 0,162 \text{ m}$$

– Momento totale all'incastro:

$$M = 400 \cdot (0,20 + 0,0225 + 0,162) = 153,8 \text{ kNm}$$



### 5.1.4 Metodo della curvatura nominale

Si determina il momento del secondo ordine

$$M_2 = N_{Ed} e_2 \quad [(5.33)]$$

essendo  $e_2 = (1/r) \cdot \ell_0^2 / c$

in cui  $c$  dipende dalla distribuzione delle curvature, ma 10 è il valore normalmente impiegato nel caso di sezione costante.

$$(1/r) = K_r \cdot K_\varphi \cdot (1/r_0) \quad [(5.34)]$$

$$K_r = (n_u - n) / (n_u - n_{bal}) \leq 1 \quad [(5.36)]$$

$$\text{con } n = \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}}; n_u = 1 + \omega; n_{bal} = 0,4$$

$$K_\varphi = 1 + \beta \varphi_{ef} \geq 1 \text{ essendo } \beta = 0,35 + f_{ck} / 200 - \lambda / 150$$

$$1/r_0 = \varepsilon_{yd} / 0,45d$$

Sostituendo nelle formule i valori corrispondenti, si ottiene:

$$n = 0,1471; n_u = 1,23; \text{ quindi poich  } n < n_{bal}, K_r = 1$$

$$\beta = 0,35 + 30 / 200 - 86,5 / 150 = -0,08, \text{ per cui } K_\varphi = 1$$

$$1/r_0 = 1,96 \cdot 10^{-3} / (0,45 \cdot 360) = 12,10 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$$

$$(1/r) = 1 \cdot 1 \cdot 12,10 \cdot 10^{-6} = 12,10 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$$

$$e_2 = 12,10 \cdot 10^{-6} \cdot 10^8 / 10 = 121 \text{ mm} = 0,121 \text{ m}$$

$$M_2 = 400 \cdot 0,121 = 48 \text{ kNm}$$

$$M_{Ed} = 80 + 9 + 48 = 137 \text{ kNm}$$

### 5.1.5 Verifica

Momento resistente della sezione d'incastro associato a  $N_{Ed}$

Il calcolo viene sviluppato con due modalit :

- mediante il diagramma d'interazione  $\mu - \nu$
- mediante calcolo secondo quanto esposto nel paragrafo 7.3 del capitolo 7: “Analisi delle configurazioni di equilibrio allo stato limite ultimo di una sezione rettangolare soggetta a forza normale e flessione”.

Diagramma d'interazione.

Dalla Tavola U10 relativa a  $f_{ck}$  fino a 50 N/mm<sup>2</sup>, con  $\omega = 0,23$ , in presenza dello sforzo normale

$$\nu = \frac{400000}{400 \cdot 400 \cdot 17} = 0,1471$$

il momento resistente risulta  $\mu = 0,155$ , da cui  $M_{Rd} = 0,155 \cdot 400^3 \cdot 17 = 168 \text{ kNm} > M_{Ed}$ .

Calcolo analitico

$$(\beta_1 = 0,8095; \beta_2 = 0,416; \varepsilon_{cu2} = 0,0035; \varepsilon_{cu2}E_s = 700 \text{ N/mm}^2)$$

Con riferimento alla figura 7.3 del punto 7.3, si individua il settore in cui la soluzione si colloca.

Retta di deformazione 0 per la quale la tensione dell'armatura  $A_{s1}$  è nulla. Viene:

$$N_{Rd} = -0,8095 \cdot 400 \cdot 40 \cdot 17 + 765 \cdot 391 = -220,18 + 299,11 = +78,93 \text{ kN}$$

Retta 1:  $A_{s1}$  è alla tensione  $-391 \text{ N/mm}^2$ . Risulta:  $x = k'd = 2,27 \cdot 40 = 90,8 \text{ mm}$

$$N_{Rd} = -0,8095 \cdot 400 \cdot 90,8 \cdot 17 = -499,81 \text{ kN}$$

La soluzione si colloca pertanto nel settore 1

La posizione dell'asse neutro si determina con l'equazione (7.6) introducendo la forza di compressione  $N_{Ed} = -400.000 \text{ N}$ :

$$x^2 - x \left( \frac{765 \cdot 391 + 400000 - 765 \cdot 700}{0,8095 \cdot 400 \cdot 17} \right) - \frac{765 \cdot 700 \cdot 40}{0,8095 \cdot 400 \cdot 17} = 0$$

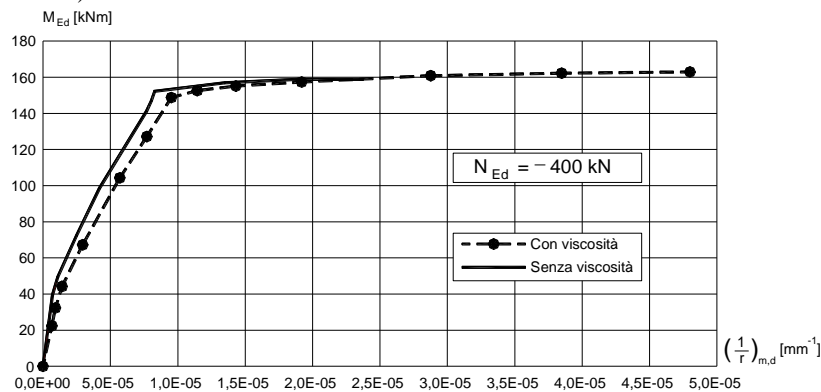
La soluzione fornisce  $x = 79 \text{ mm}$  da cui  $\sigma_{s1} = 700 \left( 1 - \frac{40}{79} \right) = 345 \text{ N/mm}^2$

Infine con la (7.7) risulta:

$$M_{Rd} = 765 \cdot 345 (200 - 40) + 0,8095 \cdot 400 \cdot 79 \cdot 17 (200 - 0,416 \cdot 79) + 765 \cdot 391 (200 - 40) = 162,7 \text{ kNm} > M_{Ed}.$$

### 5.1.6 Confronto con il metodo generale

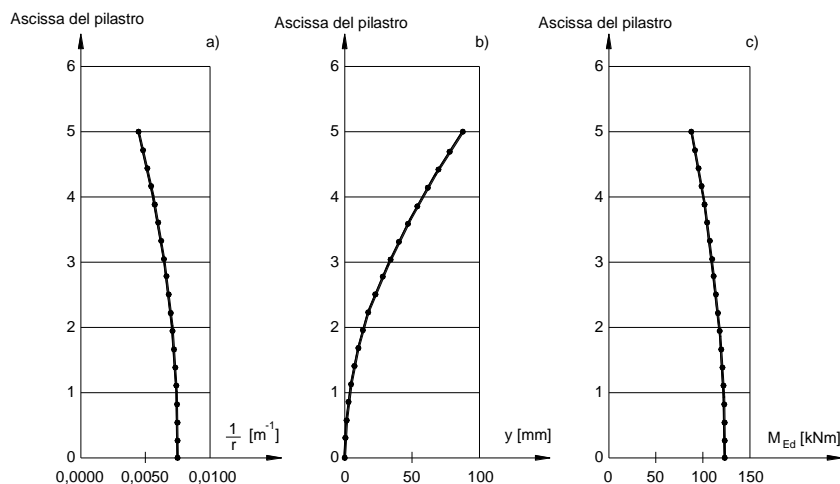
Per confrontare i risultati ottenuti con i metodi semplificati, metodo della rigidezza nominale e metodo della curvatura nominale, l'esercizio è stato risolto applicando l'analisi non lineare come descritto al punto [5.8.6] senza mettere in conto l'imperfezione geometrica (inclinazione  $\theta$ ).



**Figura A5.2** Esempio 5.1: diagramma momento-curvatura media in presenza della forza assiale di progetto.

A tal fine si è ricavato il legame momento curvatura applicando le relazioni tensioni-deformazioni per l'analisi strutturale [punto 3.1.5] facendo riferimento, come richiesto al [5.8.6], ai valori di progetto dei materiali. Nella figura seguente vengono riportate le relazioni momento – curvatura media in assenza e in presenza della viscosità.

Nei diagrammi seguenti sono riportati i risultati dell'analisi non lineare per la combinazione di azioni di progetto: curvatura media, spostamento orizzontale dell'asse e momento totale lungo la colonna, tenendo conto degli effetti del primo e secondo ordine e della viscosità. Il momento flettente totale alla base risulta  $M = 124,1$  kNm.



**Figura A5.3** Esempio 5.1: a) curvatura media; b) spostamento orizzontale dell'asse; c) momento flettente totale somma del primo e del secondo ordine.

Nel prospetto A5.1 si riportano i valori del momento di calcolo totale (I+II ordine) al piede della colonna ottenuti con i tre metodi e lo scarto percentuale dei due metodi semplificati rispetto al metodo generale senza mettere in conto l'imperfezione geometrica  $\theta$ .

**Prospetto A5.1** Esempio 5.1: risultati dei tre metodi di analisi.

	$M_{Ed}$ (I+II ordine) (kNm)	Scarto
Metodo della rigidezza nominale EC2	140,0	+13%
Metodo della curvatura nominale	128,0	+3%
Metodo generale	124,1	-

• **NOTA**

Il confronto mette in evidenza che i metodi approssimati sono entrambi conservativi a fronte del metodo generale.

Inoltre il metodo della rigidezza appare più severo di quello della curvatura. Questa constatazione però, come si vedrà con gli esempi successivi, non è generalizzabile.

## 5.2 Esempio 5.2 – Colonna di lunghezza 8 m in presso-flessione retta (fig. A5.4)

### 5.2.1 Dati del problema

Sezione circolare di diametro 800 mm

Armatura

26  $\phi 30$  disposti sulla circonferenza di diametro 640 mm

Calcestruzzo C 60/75

$$f_{cd} = 34 \text{ N/mm}^2$$

$$E_{cm} = 39000 \text{ N/mm}^2; E_{cd} = E_{cm}/1,2 = 32500 \text{ N/mm}^2 \text{ [5.20]}$$

Sollecitazione a SLU: forza assiale

$$N_{Ed} = 3000 \text{ kN con eccentricità } 0,40 \text{ m}$$

Sollecitazione a SLE combinazione quasi permanente

$$N_{0Eqp} = 1500 \text{ kN}; e = 0,40 \text{ m}$$

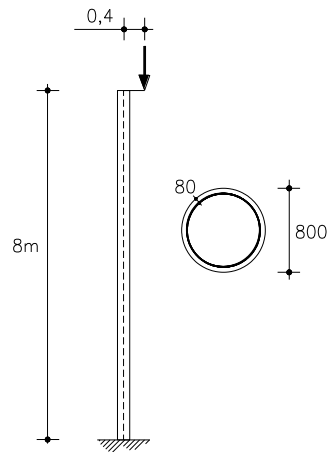
### 5.2.2 Calcoli preliminari

Rapporto geometrico di armatura

$$\rho = \frac{18378}{502654} = \frac{3,65}{100} < 0,04, \text{ valore massimo consentito.}$$

Rapporto meccanico di armatura

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}} = \frac{18378 \cdot 391}{502654 \cdot 34} = 0,42$$



**Figura A5.4** Esempio 5.2: schema della struttura.

Snellezza

$$\lambda = \ell_0 / (r/2) = 16000/200 = 80$$

Sollecitazioni allo stato limite ultimo

$$N_{Ed} = 3000 \text{ kN}; n_{Ed} = N_{Ed} / (A_{cf} f_{cd}) = \frac{3000000}{502654 \cdot 34} = 0,1755$$

$$e = 0,40 \text{ m}; M_{0Ed} = N_{Ed} e = 1200 \text{ kNm}$$

Sollecitazioni dovute a imperfezioni costruttive

Imperfezione verticalità

$$\theta_i = 0,005 \cdot 2 / \sqrt{8} = 0,0035$$

$$\theta_i \ell = 28,3 \text{ mm. Si assume il valore arrotondato } 30 \text{ mm}$$

Momento all'incastro causato dalle imperfezioni

$$N_{0Ed} (\theta_i \ell) = 3000 \cdot 0,03 = 90 \text{ kNm}$$

Momento totale del primo ordine allo stato limite ultimo

$$M_{Ed} = 1290 \text{ kNm}$$

Sollecitazioni in esercizio, combinazione quasi permanente

$$N_{0Eqp} = 1500 \text{ kN}; e = 0,40 \text{ m}; M_{0Eqp} = 600 \text{ kNm}$$

Viscosità

$$h_0 = \frac{2A}{u} = \frac{2 \cdot 0,50}{\pi \cdot 0,8} = 0,4 \text{ m} = 400 \text{ mm}$$

$$\varphi_{(\infty, t_0)} = 2,0$$

$$\varphi_{ef} = \varphi_{(\infty, t_0)} (M_{0Eqp} / M_{0Ed}) = 2 \cdot (600 / 1200) = 1$$

Snellezza limite secondo la formula (5.13N)

$$\lambda_{lim} = 20 A B C / \sqrt{n}$$

Con i dati sopra riportati risulta:

$$A = 1/1,2 = 0,833$$

$$B = \sqrt{1 + 2\omega} = \sqrt{1 + 2 \cdot 0,42} = 1,35$$

$$C = 0,7 \text{ trattandosi di elemento non controventato (nota al punto [5.8.3.1(1)])}$$

$$\sqrt{n} = \sqrt{0,1755} = 0,42$$

$$\text{e quindi } \lambda_{lim} = 20 \cdot 0,833 \cdot 1,35 \cdot 0,7 / 0,42 = 37,5$$

Essendo  $\lambda = 80$  maggiore di  $\lambda_{lim}$ , occorre tenere conto degli effetti del secondo ordine.

### 5.2.3 Metodo della rigidezza nominale

*Svolgimento secondo il procedimento EC2*

$$I_c = \pi \cdot \frac{r^4}{4} = 3,14 \cdot \frac{400^4}{4} = 2,0 \cdot 10^{10} \text{ mm}^4$$

$$E_{cd} I_c = 32500 \cdot 2,0 \cdot 10^{10} = 6,5 \cdot 10^{14} \text{ Nmm}^2$$

$$I_s = \frac{A_s \cdot r_s^2}{2} = \frac{18378 \cdot 320^2}{2} = 941 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$E_s I_s = 200000 \cdot 941 \cdot 10^6 = 1,88 \cdot 10^{14} \text{ Nmm}^2$$

Essendo poi

$$\lambda = 80$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{f_{ck}}{20}} = 1,73$$

$$k_2 = n_{Ed} \lambda / 170 = 0,1755 \cdot 80 / 170 = 0,0826$$

Risulta

$$k_c = k_1 \cdot k_2 / (1 + \varphi_{ef}) = 1,73 \cdot 0,0826 / 2 = 0,0714$$

La rigidezza nominale risulta

$$EI = k_c \cdot E_{cd} I_c + E_s I_s = (0,0714 \cdot 6,5 + 1,88) \cdot 10^{14} = 2,34 \cdot 10^{14} \text{ Nmm}^2$$

Il carico critico euleriano calcolato con la rigidezza nominale risulta

$$N_B = \pi^2 EI / \ell^2 = 9,86 \cdot 2,34 \cdot 10^{14} / 16000^2 = 9010 \cdot 10^3 \text{ N} = 9010 \text{ kN}$$

Essendo i valori di  $\beta$  diversi a seconda del carico verticale ( $M$  uniforme) e delle imperfezioni geometriche ( $M$  triangolare), si calcolano con questi i momenti corrispondenti:

- carico verticale  $M = 1200 \text{ kNm}$ ;  $\beta = 1,23$
- imperfezioni  $M = 90 \text{ kNm}$ ;  $\beta = 0,82$

I momenti totali ( $1^0$  e  $2^0$  ordine), con la [5.28], risultano

$$1200 \cdot \left[ 1 + \frac{1,23}{\frac{9010}{3000} - 1} \right] = 1936 \text{ kNm} ; \quad 90 \cdot \left[ 1 + \frac{0,82}{\frac{9010}{3000} - 1} \right] = 127 \text{ kNm}$$

e, complessivamente:  $1936 + 127 = 2063 \text{ kNm}$ .

***Soluzione con l'integrazione dell'equazione differenziale della linea elastica***

Si introduce la rigidezza nominale

$$EI = 2,34 \cdot 10^{14} \text{ Nmm}^2 \text{ e si calcola } \alpha^2 = \frac{N_{Ed}}{EI} = \frac{3000 \cdot 10^3}{2,34 \cdot 10^{14}} = 1,382 \cdot 10^{-8} \text{ mm}^{-2}$$

quindi  $\alpha = 1,13 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$

Seguono gli altri termini:

$$\alpha \ell = 1,13 \cdot 10^{-4} \cdot 8000 = 0,905 ; \sin \alpha \ell = 0,7869 ; \cos \alpha \ell = 0,6170$$

$$\frac{\theta}{\alpha} = \frac{35 \cdot 10^{-4}}{1,13 \cdot 10^{-4}} = 31 ; \theta \ell = 30$$

L'eccentricità del secondo ordine  $f$  risulta (la formula con i simboli è riportata nell'esempio 1):

$$f = \frac{400 \cdot (1 - 0,6170) + 31 \cdot 0,7869 - 30 \cdot 0,6170}{0,6170} = 257 \text{ mm}$$

L'eccentricità complessiva vale:  $400 + 30 + 257 = 687 \text{ mm}$

Il momento sollecitante risulta:  $M_{Ed} = 3000 \cdot 0,687 = 2061 \text{ kNm}$

#### ***Soluzione mediante il calcolo degli spostamenti della retta di azione della forza assiale***

Calcolo degli spostamenti trasversali

– Pressoflessione

$$f_1 = \frac{N_{Ed} \cdot e \cdot \ell^2}{2EI} = \frac{3000 \cdot 0,40 \cdot 10^6 \cdot 64 \cdot 10^6}{2 \cdot 234 \cdot 10^{12}} = 164,0 \text{ mm}$$

– Imperfezione geometrica  $\theta = 0,0035 ; \theta \ell = 28,3 \text{ mm}$

$$s = \frac{3000 \cdot 512 \cdot 10^{12}}{3 \cdot 234 \cdot 10^{12}} \cdot 0,0035 = 7,7 \text{ mm}$$

– Coefficiente di amplificazione degli spostamenti

$$N_B = 9010 \text{ kN}$$

$$\frac{1}{1 - N_{Ed} / N_B} = \frac{1}{1 - (3000 / 9010)} = 1,50$$

– Somma degli spostamenti flessionali e amplificazione della stessa

$$(164,0 + 7,7) \cdot 1,50 = 258 \text{ mm} = 0,258 \text{ m}$$

– Momento totale all'incastro:

$$M = 3000 \cdot (0,40 + 0,028 + 0,258) = 2058,0 \text{ kNm}$$

#### **5.2.4 Metodo della curvatura nominale**

Si introduce il valore di  $\omega = 0,42$  adottato col metodo della rigidezza e si sviluppa il calcolo secondo la sequenza indicata dall'EC2.

$$n_{bal} = 0,4$$

$$n_u = 1 + \omega = 1,42$$

$$K_r = (n_u - n) / (n_u - n_{bal}) = (1,42 - 0,1755) / (1,42 - 0,4) = 1,22$$

Per la [5.36] si assume  $K_r = 1$

$$\beta = 0,35 + f_{ck}/200 - \lambda/150 = 0,35 + 0,30 - 0,53 = 0,12$$

$$K_{\varphi} = 1 + \beta \varphi_{ef} = 1 + 0,12 = 1,12$$

$$\varepsilon_{yd} = 1,96 \cdot 10^{-3}$$

Poiché le armature sono distribuite lungo la circonferenza di diametro 640 mm, la [5.35] definisce l'altezza utile

$$d = (h/2) + i_s$$

Essendo

$$\frac{h}{2} = \frac{800}{2} = 400 \text{ mm e}$$

$$i_s = \sqrt{\frac{I_s}{A_s}} = \sqrt{\frac{94100 \cdot 10^4}{18378}} = 226 \text{ mm}$$

risulta

$$d = (400 + 226) = 626 \text{ mm}$$

Applicando detto valore risulta:

$$(1/r)_0 = 1,96 \cdot 10^{-3} / (0,45d) = 6,96 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$$

$$1/r = K_r K_{\varphi} (1/r)_0 = 6,96 \cdot 10^{-6} \cdot 1,0 \cdot 1,12 = 7,79 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$$

e, infine

$$e_2 = (1/r)_0^2 / 10 = 7,79 \cdot 10^{-6} \cdot 16^2 \cdot 10^6 / 10 = 200 \text{ mm}$$

$$M_2 = N_{Ed} e_2 = 3000 \cdot 0,2 = 600 \text{ kNm}$$

Il momento sollecitante complessivo vale pertanto

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2 = 1200 + 90 + 600 = 1890 \text{ kNm}$$

### 5.2.5 Verifica della sezione di incastro

Il calcolo viene sviluppato facendo ricorso al diagramma d'interazione  $\nu - \mu$  di cui alla Tavola U19, che vale per sezione circolare con  $f_{ck} = 60 \text{ N/mm}^2$ .

Si assumono le sollecitazioni calcolate col metodo della rigidezza. I valori adimensionali sono:

$$\nu = \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}} = \frac{3000000}{502654 \cdot 34} = 0,1755$$

$$\mu = \frac{M_{Ed}}{A_c \cdot h \cdot f_{cd}} = \frac{2063 \cdot 10^6}{502654 \cdot 800 \cdot 34} = 0,1509$$

Per tale coppia di valori la Tavola U19 richiede  $\omega = 0,37$ .

Nel calcolo era stato introdotto

$$\omega = 0,42 > 0,37$$

La verifica è pertanto soddisfatta.



### 5.3 Esempio 5.3 – Colonna di lunghezza 5 m sollecitata da forza assiale e forza trasversale (fig. A5.5)

#### 5.3.1 Dati del problema

Sezione quadrata di lato

$$h = 400 \text{ mm}$$

Armatura doppia simmetrica costituita da 4  $\phi 26$  per lembo

$$d' = 40 \text{ mm}$$

Calcestruzzo C 70/85

$$f_{cd} = 39,6 \text{ N/mm}^2$$

$$E_{cm} = 41000 \text{ N/mm}^2; E_{cd} = E_{cm}/1,2 = 34166 \text{ N/mm}^2 [5.20].$$

Sollecitazione a SLU

forza assiale  $N_{Ed} = 500 \text{ kN}$  centrata;

forza orizzontale  $H_{Ed} = 50 \text{ kN}$  applicata alla sommità della colonna.

Sollecitazione a SLE combinazione quasi permanente

$N_{0Eqp} = 250 \text{ kN}$  centrata.

#### 5.3.2 Calcoli preliminari

Lunghezza libera d'inflessione

$$\ell_0 = 2 \cdot 5 = 10 \text{ m}$$

Snellezza

$$\lambda = \frac{\ell_0}{(h/3,46)} = \frac{10000}{(400/3,46)} = 86,50$$

Rapporto geometrico di armatura

$$\rho = \frac{2 \cdot 2120}{400^2} = 0,0265$$

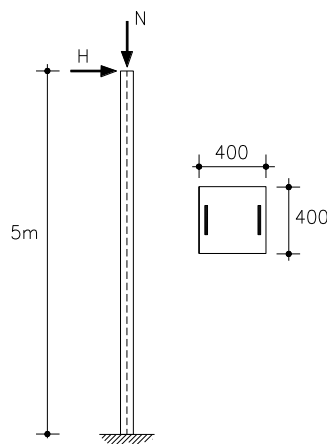


Figura A5.5 Esempio 5.3: schema della struttura.

Rapporto meccanico di armatura

$$\omega = \rho \frac{f_{yd}}{f_{cd}} = 0,0265 \cdot \frac{391}{39,66} = 0,2617$$

Sollecitazioni allo stato limite ultimo

$$N_{Ed} = 500 \text{ kN}; \quad n = N_{Ed} / (A_c f_{cd}) = 0,0789$$

$$H_{Ed} = 50 \text{ kN}; \quad M_{0Ed} = 50 \cdot 5 = 250 \text{ kNm}$$

Sollecitazioni dovute a imperfezioni costruttive

Imperfezione verticalità

$$\theta_i = 0,005 \cdot 2 / \sqrt{5} = 0,0045$$

$$\theta_i \ell = 22 \text{ mm}$$

Momento dovuto alle imperfezioni

$$N_{Ed} (\theta_i \ell) = 11 \text{ kNm}$$

Momento totale del primo ordine allo stato limite ultimo

$$M_{0Ed} = 261 \text{ kNm}$$

Sollecitazioni in esercizio, combinazione quasi permanente

$$N_{0Eqp} = 250 \text{ kN}$$

$$H_{0Eqp} = 20 \text{ kN}; \quad M_{0Eqp} = 100 \text{ kNm}$$

Viscosità

$$\varphi_{(\infty, t_0)} = 1,5$$

$$\varphi_{ef} = \varphi_{(\infty, t_0)} (M_{0Eqp} / M_{0Ed}) = 1,5 (100 / 250) = 0,60$$

Snellezza limite secondo la formula [5.13N]

$$\lambda_{lim} = 20 A B C / \sqrt{n}$$

Con i dati sopra riportati viene:

$$A = 1 / (1 + 0,2 \cdot 0,6) = 0,89$$

$$B = \sqrt{1 + 2 \cdot 0,26} = 1,23$$

$$C = 0,7 \text{ trattandosi di elemento non controventato (v. nota al punto [5.8.3.1])}$$

$$\sqrt{n} = \sqrt{0,0789} = 0,28$$

e quindi

$$\lambda_{lim} = 20 \cdot 0,89 \cdot 1,23 \cdot 0,7 / 0,28 = 55$$

Essendo  $\lambda = 86,5$  maggiore di  $\lambda_{lim}$ , occorre tenere conto degli effetti del secondo ordine.

### 5.3.3 Metodo della rigidezza nominale

*Svolgimento con il procedimento EC2*

$$E_{cd} I_c = 34166 \cdot 400^4 / 12 = 7,28 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2$$

$$E_s I_s = E_s A_s (h/2 - d')^2$$

Essendo  $A_s = 2120 \text{ mm}^2$  su ciascun lembo, risulta

$$E_s I_s = 2 \cdot 2120 \cdot (200 - 40)^2 \cdot 200000 = 21,69 \cdot 10^{12} \text{ N/mm}^2$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{f_{ck}}{20}} = 1,87$$

$$k_2 = n_{Ed} \lambda / 170 = 0,0789 \cdot 86,5 / 170 = 0,0402$$

$$k_c = k_1 k_2 / (1 + \varphi_{ef}) = 1,87 \cdot 0,0402 / 1,60 = 0,047$$

$$EI = k_c \cdot E_{cd} I_c + E_s I_s = 0,047 \cdot 7,28 \cdot 10^{13} + 21,69 \cdot 10^{12} = 25,11 \cdot 10^{12} \text{ N/mm}^2$$

$$N_B = \pi^2 EI / \ell_0^2 = 9,86 \cdot 25,11 \cdot 10^{12} / 10^8 = 2476 \text{ kN}$$

Essendo  $\beta = \pi^2 / c_0$ , con  $c_0 = 12$  (diagramma  $M_1$  triangolare) risulta  $\beta = 9,86/12 = 0,82$  e quindi:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} \left[ 1 + \frac{\beta}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1} \right] = 261 \cdot \left[ 1 + \frac{0,82}{\frac{2476}{500} - 1} \right] = 315,1 \text{ kNm}$$

### ***Soluzione mediante integrazione dell'equazione differenziale della linea elastica***

Si riportano le formule risolutive per l'esempio trattato

- Inclinazione  $\theta$  (imperfezione geometrica)

$$M_{\max} = N_{Ed} \cdot (\theta / \alpha) \cdot \tan(\alpha \ell)$$

- Forza orizzontale  $H_{Ed}$  in sommità:

$$\text{Questa determina il momento del primo ordine } M_0 = H_{Ed} \cdot \ell$$

Il momento totale in presenza di  $N_{Ed}$  vale:

$$M_{\text{tot}} = M_0 \cdot \frac{\tan(\alpha \ell)}{\alpha \ell}$$

Introducendo i dati del problema risulta:

$$\alpha = \sqrt{\frac{N_{Ed}}{EI}} = \sqrt{\frac{50 \cdot 10^4}{25,11 \cdot 10^{12}}} = 1,41 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$$

$$\alpha \ell = 1,41 \cdot 10^{-4} \cdot 5000 = 0,705$$

$$\cos \alpha \ell = 0,7613$$

$$\tan \alpha \ell = 0,8518$$

$$\theta / \alpha = 0,0045 / (1,41 \cdot 10^{-4}) = 31,9 \text{ mm}$$

Imperfezione geometrica

$$M = 500 \cdot 0,032 \cdot 0,8518 = 13,6 \text{ kNm}$$

Forza orizzontale

$$M = 50 \cdot 5 \cdot \frac{0,8518}{0,705} = 302 \text{ kNm}$$

Momento complessivo:  $302,0 + 13,6 = 315,6 \text{ kNm}$

**Soluzione mediante il calcolo degli spostamenti della retta di azione della forza assiale**

Calcolo degli spostamenti trasversali

- Effetto della forza orizzontale  $H_{Ed}$

$$f_1 = \frac{H_{Ed} \cdot \ell^3}{3EI} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 125 \cdot 10^9}{3 \cdot 25,11 \cdot 10^{12}} = 83,0 \text{ mm}$$

- Imperfezione geometrica  $\theta = 0,0045$  ;  $\theta \ell = 22,5 \text{ mm}$

$$s = \frac{500 \cdot 125 \cdot 10^{12}}{3 \cdot 25,11 \cdot 10^{12}} \cdot 0,0045 = 3,70 \text{ mm}$$

- Coefficiente di amplificazione degli spostamenti

$$N_B = 2476 \text{ kN}$$

$$\frac{1}{1 - N_{Ed} / N_B} = \frac{1}{1 - (500 / 2476)} = 1,25$$

- Somma degli spostamenti flessionali e amplificazione della stessa

$$(83,0 + 3,7) \cdot 1,25 = 108 \text{ mm} = 0,108 \text{ m}$$

- Momento totale all'incastro:

$$M = 50 \cdot 5,0 + 500 \cdot (0,022 + 0,108) = 250,0 + 65,0 = 315,0 \text{ kNm}$$

### 5.3.4 Metodo della curvatura nominale

Si introduce il valore di  $\omega = 0,26$  adottato con il metodo della rigidezza e si sviluppa il calcolo secondo la sequenza indicata dall'EC2.

$$n_{bal} = 0,4$$

$$n_u = 1 + \omega = 1,26$$

$$k_r = (n_u - n) / (n_u - n_{bal}) = (1,26 - 0,0789) / (1,26 - 0,4)$$

Essendo  $n$  minore di 0,4, si assume  $k_r = 1$

$$\beta = 0,35 + f_{ck} / 200 - \lambda / 150 = 0,35 + 0,35 - 86,5 / 150 = 0,123$$

$$k_\phi = 1 + \beta \phi_{ef} = 1 + 0,123 \cdot 0,6 = 1,07$$

$$\varepsilon_{yd} = 1,96 \cdot 10^{-3}$$

$$d = h - d' = 360 \text{ mm}$$

$$(1/r)_0 = 1,96 \cdot 10^{-3} / (0,45 d) = 12,10 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$$

$$(1/r) = k_r k_\phi (1/r)_0 = 1,07 \cdot 12,10 \cdot 10^{-6} = 12,95 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$$

$$e_2 = (1/r) \ell_0^2 / 10 = 12,95 \cdot 10^{-6} \cdot 10^8 / 10 = 130 \text{ mm}$$

$$M_2 = N_{Ed} e_2 = 500 \cdot 0,130 = 65,0 \text{ kNm}$$

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2 = 261 + 65 = 326 \text{ kNm}$$

### 5.3.5 Verifica della sezione di incastro

Diagramma d'interazione.

Dalla Tavola U12 relativa a  $f_{ck} = 70 \text{ N/mm}^2$ , con  $\omega = 0,26$ , in presenza dello sforzo normale  $\nu = \frac{500000}{400 \cdot 400 \cdot 39,6} = 0,0789$ , il momento resistente risulta  $\mu = 0,14$ , da cui

$$M_{Rd} = 0,14 \cdot 400^3 \cdot 39,6 = 354 \text{ kNm} > M_{Ed}.$$

Calcolo analitico

$$(\beta_1 = 0,637; \beta_2 = 0,362; \varepsilon_{cu2} = 0,0027; \varepsilon_{cu2} E_s = 540 \text{ N/mm}^2)$$

Con riferimento alla figura 7.3 del punto 7.4, si individua il settore in cui la soluzione si colloca. Con la retta 0 per la quale la tensione nell'armatura  $A_{s1}$  è nulla, risulta:

$$N_{Rd} = -0,637 \cdot 400 \cdot 40 \cdot 39,6 + 2120 \cdot 391 = +425 \text{ kN}$$

Con la retta 1 risulta  $x = k_1 d' = 3,65 \cdot 40 = 146 \text{ mm}$  e quindi

$$N_{Rd} = -2120 \cdot 391 - 0,637 \cdot 400 \cdot 146 \cdot 39,6 + 2120 \cdot 391 = -1473 \text{ kN}.$$

La soluzione per  $N = -500 \text{ kN}$  si colloca nel settore 1. Viene pertanto:

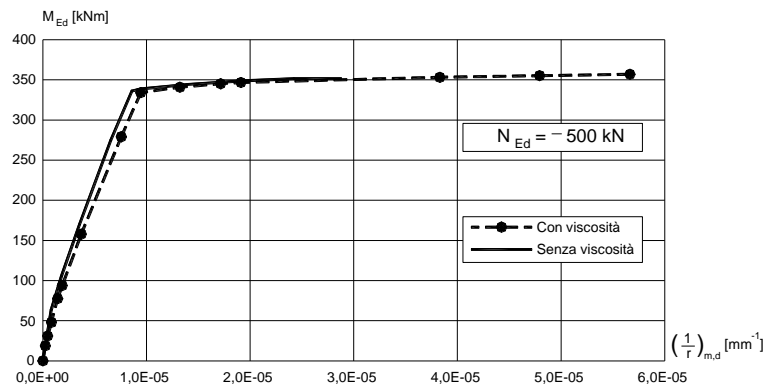
$$x^2 - x \left( \frac{2120 \cdot 391 + 500000 - 2120 \cdot 540}{0,637 \cdot 400 \cdot 39,6} \right) - \frac{2120 \cdot 540 \cdot 40}{0,637 \cdot 400 \cdot 39,6} = 0$$

La soluzione è  $x = 77 \text{ mm}$ , da cui

$$\sigma_{s1} = 540 \left( 1 - \frac{40}{77} \right) = 259 \text{ N/mm}^2$$

Infine con la (7.7) risulta:

$$M_{Rd} = 2120 \cdot 259 (200 - 40) + 0,637 \cdot 400 \cdot 77 \cdot 39,6 (200 - 0,362 \cdot 77) + 2120 \cdot 391 (200 - 40) = 354 \text{ kNm} > M_{Ed}.$$



**Figura A5.6** Esempio 5.3: diagramma momento-curvatura media in presenza della forza assiale di progetto.

5.3.6 Confronto con il metodo generale

Al fine di confrontare i risultati ottenuti con i metodi semplificati, l'esercizio è stato risolto con l'analisi non lineare come descritto al punto [5.8.6] senza mettere in conto l'imperfezione geometrica (inclinazione  $\theta$ ).

L'analisi è stata condotta mantenendo costante il valore del carico verticale e facendo crescere la forza orizzontale, simulando così il comportamento di una colonna soggetta al sisma.

Nella figura 5.11 sono riportate le relazioni momento-curvatura media in assenza e in presenza della viscosità. Nei diagrammi della fig. A5.7 viene riportato l'andamento della curvatura media, dello spostamento orizzontale dell'asse e del momento totale lungo la colonna, tenendo conto degli effetti del I+II ordine, sotto l'azione dei carichi di progetto.

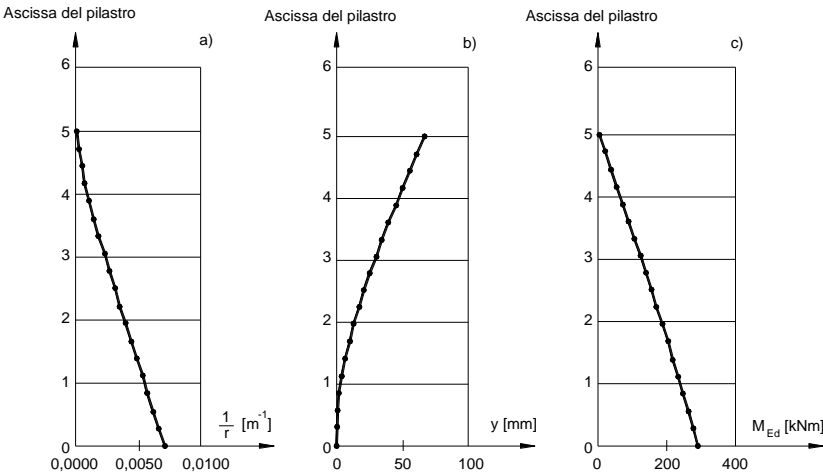


Figura A5.7 Esempio 5.3: a) curvatura media; b) spostamento orizzontale dell'asse; c) momento flettente totale somma del primo e del secondo ordine.

Il prospetto A5.2 contiene i valori del momento di progetto totale (I+II ordine) al piede della colonna ottenuti con i tre modelli e lo scarto percentuale dei due metodi semplificati rispetto al metodo generale senza mettere in conto l'imperfezione geometrica  $\theta$ .

Prospetto A5.2 Esempio 5.3: confronto dei tre metodi di analisi.

	$M_{Ed}$ (I+II ordine) kNm	Scarto
Metodo della rigidezza nominale	302,0	+3%
Metodo della curvatura nominale	315,0	+7%
Metodo generale	292,7	-

#### 5.4 Esempio 5.4 – Colonna di lunghezza 8 m sollecitata da forza assiale eccentrica e forza trasversale (fig. A5.8)

##### 5.4.1 Dati del problema

Sezione quadrata di lato

$$h = 500 \text{ mm}$$

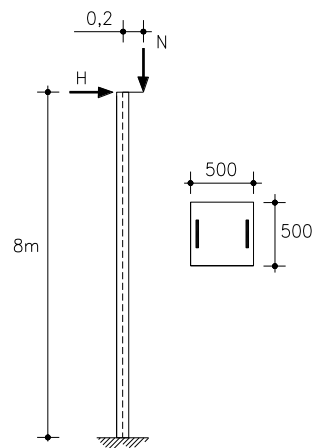
Armatura doppia simmetrica ( $4\phi 28 + 4\phi 26 = 4583 \text{ mm}^2$  per lembo)

$$d' = 50 \text{ mm}$$

Calcestruzzo C 90/105

$$f_{cd} = 51 \text{ N/mm}^2$$

$$E_{cm} = 44000 \text{ N/mm}^2; E_{cd} = E_{cm}/1,2 = 36666 \text{ N/mm}^2 [5.20].$$



**Figura A5.8** Esempio 4: schema della struttura.

Sollecitazione a SLU

forza assiale  $N_{Ed} = 1000 \text{ kN}$  con  $e = 0,20 \text{ m}$

forza orizzontale  $H_{Ed} = 50 \text{ kN}$  applicata alla sommità della colonna

Sollecitazione a SLE combinazione quasi permanente

$N_{0Eqp} = 500 \text{ kN}$ ;  $e = 0,20 \text{ m}$ ;  $H_{0Eqp} = 25 \text{ kN}$

##### 5.4.2 Calcoli preliminari

Lunghezza libera d'inflessione

$$\ell_0 = 2 \cdot 8 = 16 \text{ m}$$

Snellezza

$$\lambda = \frac{\ell_0}{(h/3,46)} = \frac{16000}{(500/3,46)} = 110,7$$

Rapporto geometrico di armatura

$$\rho = \frac{2 \cdot 4583}{500^2} = 0,0366 < 0,04, \text{ massimo consentito [9.5.2(3)]}.$$

Rapporto meccanico di armatura

$$\omega = \rho \frac{f_{yd}}{f_{cd}} = 0,0366 \cdot \frac{391}{51,0} = 0,2809$$

Sollecitazioni allo stato limite ultimo

$$N_{Ed} = 1000 \text{ kN}; \quad n = N_{Ed} / (A_c f_{cd}) = 0,0784$$

$$e = 0,2 \text{ m}; \quad H_{Ed} = 50 \text{ kN}$$

$$M_{0Ed} = 1000 \cdot 0,2 + 50 \cdot 8 = 200 + 400 = 600 \text{ kNm}$$

Sollecitazioni dovute a imperfezioni costruttive

Imperfezione verticalità

$$\theta_i = 0,005 \cdot 2 / \sqrt{8} = 0,0035 \quad [5.1]$$

$$\theta_i \ell = 0,028 \text{ m}$$

Momento dovuto alle imperfezioni

$$N_{Ed} (\theta_i \ell) = 28 \text{ kNm} \quad [5.2]$$

Momento dovuto alla forza orizzontale e alle imperfezioni

$$M_{0Ed} = 400 + 28 = 428 \text{ kNm}$$

Momento dovuto alla forza verticale

$$1000 \cdot 0,2 = 200 \text{ kNm}$$

Momento totale del primo ordine allo stato limite ultimo

$$M_{Ed} = 628 \text{ kNm}$$

Sollecitazioni in esercizio, combinazione quasi permanente

$$N_{0Eqp} = 500 \text{ kN}; \quad e = 0,2 \text{ m}; \quad H_{0Eqp} = 25 \text{ kN}$$

$$M_{0Eqp} = 500 \cdot 0,2 + 25 \cdot 8 = 300 \text{ kNm}$$

Viscosità

$$\varphi_{(\infty, t_0)} = 1,30$$

$$\varphi_{ef} = \varphi_{(\infty, t_0)} (M_{0Eqp} / M_{0Ed}) = 1,30 \cdot (300/628) = 0,62 \quad [5.19]$$

Snellezza limite secondo la formula [5.13N]

$$\lambda_{lim} = 20 A B C / \sqrt{n}$$

Con i dati sopra riportati viene:

$$A = 1 / (1 + 0,2 \cdot 0,62) = 0,89$$

$$B = \sqrt{1 + 2 \cdot 0,28} = 1,25$$

$$C = 0,7 \text{ trattandosi di elemento non controventato (v. nota al punto [5.8.3.1])}$$

$$\sqrt{n} = 0,28$$



e quindi

$$\lambda_{lim} = 20 \cdot 0,89 \cdot 1,25 \cdot 0,7 / 0,28 = 44,5$$

Essendo  $\lambda = 110,7$  maggiore di  $\lambda_{lim}$ , occorre tenere conto degli effetti del secondo ordine.

### 5.4.3 Metodo della rigidezza nominale

**Soluzione secondo il procedimento EC2**

$$E_{cd} I_c = 36666 \cdot 500^4 / 12 = 19,0 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2$$

$$E_s I_s = E_s A_s (h/2 - d'')^2.$$

Essendo  $A_s = 4583 \text{ mm}^2$  su ciascun lembo, risulta

$$E_s I_s = 200000 \cdot 4583 \cdot 2 \cdot 200^2 = 7,33 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{f_{ck}}{20}} = 2,12$$

$$k_2 = n_{Ed} \lambda / 170 = 0,0784 \cdot 110,7 / 170 = 0,0511$$

$$k_c = k_1 k_2 / (1 + \phi_{ef}) = 2,12 \cdot 0,0511 / (1 + 0,62) = 0,067$$

$$EI = k_c E_{cd} I_c + E_s I_s = 0,0675 \cdot 19 \cdot 10^{13} + 7,33 \cdot 10^{13} = 8,60 \cdot 10^{13} \text{ N/mm}^2$$

$$N_B = \pi^2 EI / \ell_0^2 = 9,86 \cdot 86,0 \cdot 10^{12} / 256 \cdot 10^6 = 3312 \text{ kN}$$

Il momento del I ordine dovuto al carico verticale è costante lungo l'altezza, pertanto è necessario associarvi il valore di  $\beta = \pi^2 / 8 = 1,23$ ; il momento del I ordine dovuto alla forza orizzontale e alle imperfezioni costruttive è invece triangolare, quindi per questo si introduce il valore di  $\beta = \pi^2 / 12 = 0,82$ . Risulta dunque:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} \left[ 1 + \frac{\beta}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1} \right] = 200 \cdot \left[ 1 + \frac{1,23}{\frac{3312}{1000} - 1} \right] + 428 \cdot \left[ 1 + \frac{0,82}{\frac{3312}{1000} - 1} \right] = 886,2 \text{ kNm}$$

**Soluzione mediante integrazione dell'equazione differenziale della linea elastica**

Si riportano le formule risolutive per l'esempio trattato

- Forza assiale eccentrica:

$$M_{tot} = N_{Ed} \frac{e}{\cos(\alpha \ell)}$$

- Inclinazione  $\theta$  (imperfezione geometrica)

$$M_{max} = N_{Ed} \cdot (\theta / \alpha) \cdot \tan(\alpha \ell)$$

- Forza orizzontale  $H_{Ed}$  in sommità: questa determina il momento del primo ordine

$$M_0 = H_{Ed} \cdot \ell$$

Il momento totale in presenza di  $N_{Ed}$  vale:

$$M_{\text{tot}} = M_0 \cdot \frac{\tan(\alpha \ell)}{\alpha \ell}$$

Introducendo i dati del problema risulta:

$$\alpha = \sqrt{\frac{N_{Ed}}{EI}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 10^4}{86,0 \cdot 10^{12}}} = 1,078 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$$

$$\alpha \ell = 1,078 \cdot 10^{-4} \cdot 8000 = 0,8627$$

$$\cos \alpha \ell = 0,6504$$

$$\tan \alpha \ell = 1,1678$$

$$\theta / \alpha = 0,0035 / (1,078 \cdot 10^{-4}) = 32,4 \text{ mm}$$

Presso flessione:  $M = \frac{1000 \cdot 0,20}{0,6504} = 307,7 \text{ kNm}$

Imperfezione geometrica:  $M = 1000 \cdot 0,032 \cdot 1,1678 = 37,4 \text{ kNm}$

Forza orizzontale:  $M = 50 \cdot 8 \cdot \frac{1,1678}{0,8627} = 541,4 \text{ kNm}$

Momento complessivo:  $307,7 + 37,4 + 541,4 = 886,5 \text{ kNm}$

**Soluzione mediante il calcolo diretto degli spostamenti della retta di azione della forza assiale**

Calcolo degli spostamenti trasversali

– Presso flessione

$$f_1 = \frac{N_{Ed} \cdot e \cdot \ell^2}{2EI} = \frac{1000 \cdot 0,20 \cdot 10^6 \cdot 64 \cdot 10^6}{2 \cdot 86 \cdot 10^{12}} = 74,4 \text{ mm}$$

– Effetto della forza orizzontale  $H_{Ed}$

$$f_1 = \frac{H_{Ed} \cdot \ell^3}{3EI} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 512 \cdot 10^9}{3 \cdot 86 \cdot 10^{12}} = 99,2 \text{ mm}$$

– Imperfezione geometrica  $\theta = 0,0035$  ;  $\theta \ell = 28,0 \text{ mm}$

$$s = \frac{1000 \cdot 512 \cdot 10^{12}}{3 \cdot 86 \cdot 10^{12}} \cdot 0,0035 = 6,9 \text{ mm}$$

– Coefficiente di amplificazione degli spostamenti

$$N_B = 3312 \text{ kN}$$

$$\frac{1}{1 - N_{Ed} / N_B} = \frac{1}{1 - (1000 / 3312)} = 1,43$$

– Somma degli spostamenti flessionali e amplificazione della stessa

$$(74,4 + 99,2 + 6,9) \cdot 1,43 = 258 \text{ mm} = 0,258 \text{ m}$$

– Momento totale all'incastro:

$$M = 50,0 \cdot 8,0 + 1000 \cdot (0,20 + 0,028 + 0,258) = 886,0 \text{ kNm}$$

### 5.5 Esempio 4bis

Lo stesso esercizio viene svolto con l'applicazione delle formule risolutive del punto 5.5.2.4 (caso c).

Si sostituisce la forza  $H_{Ed}$  con la distribuzione  $q_H = 12,5$  kN/m che produce lo stesso momento d'incastro  $M_0 = 400$  kNm. Il pilastro è pertanto soggetto a tre tipi di diagramma  $M$  del primo ordine:

- uniforme, per effetto di  $N_{Ed}$ , con valore all'incastro  $M = 200$  kNm
- triangolare per effetto delle imperfezioni con  $M_0 = 28$  kNm
- parabolico per effetto di  $q_H$  con  $M_0 = 400$  kNm. Per questa distribuzione  $\beta = 0,62$

Il momento d'incastro complessivo risulta:

$$M_{Ed} = 200 \cdot \left[ 1 + \frac{1,23}{\frac{3312}{1000} - 1} \right] + 28 \cdot \left[ 1 + \frac{0,82}{\frac{3312}{1000} - 1} \right] + 400 \cdot \left[ 1 + \frac{0,62}{\frac{3312}{1000} - 1} \right] =$$

$$= 200 \cdot 1,53 + 28 \cdot 1,35 + 400 \cdot 1,27 = 306,0 + 37,8 + 508,0 = 851,8 \text{ kNm}$$

valore minore di quello ottenuto con la forza  $H_{Ed}$  in quanto, in questo caso, il diagramma  $M_0$  dovuto a  $q_H$  ha un'area minore.

#### *Soluzione mediante integrazione dell'equazione differenziale della linea elastica*

I momenti dovuti alla forza  $N_{Ed}$  eccentrica e alle imperfezioni sono quelli dell'esempio 4.

Forze orizzontali distribuite uniformemente

$$q_H = 12,5 \text{ kN/m}$$

Momento d'incastro<sup>1</sup>:

$$M = \left( q_H \cdot \frac{\ell^2}{2} \right) \cdot \left[ 2 \cdot \frac{\tan(\alpha\ell)}{\alpha\ell} - 2 \cdot \frac{(1 - \cos(\alpha\ell))}{(\alpha\ell)^2 \cdot \cos(\alpha\ell)} \right] =$$

$$= 400 \cdot \left[ 2 \cdot \frac{1,1678}{0,8627} - 2 \cdot \frac{(1 - 0,6504)}{0,8627^2 \cdot 0,6504} \right] = 505,2 \text{ kNm}$$

Momento complessivo

$$307,7 + 37,4 + 505,2 = 850,3 \text{ kNm}$$

#### *Soluzione mediante il calcolo degli spostamenti della retta di azione della forza assiale*

- Presso flessione

$$f_1 = \frac{N_{Ed} \cdot e \cdot \ell^2}{2EI} = \frac{1000 \cdot 0,20 \cdot 10^6 \cdot 64 \cdot 10^6}{2 \cdot 86 \cdot 10^{12}} = 74,4 \text{ mm}$$

- Effetto della distribuzione orizzontale  $q_H$

<sup>1</sup> Formula dedotta dallo studio di una colonna verticale di lunghezza  $2\ell$  vincolata con carrello e cerniera, soggetta al carico  $q_H$  e con reazioni  $q_H\ell$  (da O. Belluzzi, Scienza delle costruzioni, 1953, vol. 1, pag. 288, formule (4.31) e (4.34)).

$$f_1 = \frac{q_{hd} \cdot \ell^4}{8EI} = \frac{12,5 \cdot 8^4 \cdot 10^{12}}{8 \cdot 86 \cdot 10^{12}} = 74,4 \text{ mm}$$

- Imperfezione geometrica

$$\theta = 0,0035 ; \quad \theta \ell = 28,0 \text{ mm}$$

$$s = \frac{1000 \cdot 512 \cdot 10^{12}}{3 \cdot 86 \cdot 10^{12}} \cdot 0,0035 = 6,9 \text{ mm}$$

- Coefficiente di amplificazione degli spostamenti

Essendo

$N_B = 3312 \text{ kN}$ , risulta:

$$\frac{1}{1 - N_{Ed} / N_B} = \frac{1}{1 - (1000 / 3312)} = 1,43$$

- Somma degli spostamenti flessionali e amplificazione della stessa :

$$(74,4 + 74,4 + 6,9) \cdot 1,43 = 222 \text{ mm} = 0,222 \text{ m}$$

- Momento totale all'incastro:

$$M = 50,0 \cdot 8,0 + 1000 \cdot (0,20 + 0,028 + 0,222) = 850,0 \text{ kNm}$$

### 5.5.1 Metodo della curvatura nominale

Si introduce il valore di  $\omega = 0,28$  adottato con il metodo della rigidezza e si sviluppa il calcolo secondo la sequenza indicata dall'EC2.

$$n_{bal} = 0,4$$

$$n_u = 1 + \omega = 1,28$$

$$k_r = (n_u - n) / (n_u - n_{bal}) = (1,28 - 0,0784) / (1,28 - 0,4)$$

Essendo  $n$  minore di 0,4, si assume  $k_r = 1$

$$\beta = 0,35 + f_{ck} / 200 - \lambda / 150 = 0,35 + 0,45 - 110,7 / 150 = 0,062$$

$$k_\phi = 1 + \beta \phi_{ef} = 1 + 0,062 \cdot 0,62 = 1,04$$

$$\varepsilon_{yd} = 1,96 \cdot 10^{-3}$$

$$d = h - d' = 450 \text{ mm}$$

$$(1/r)_0 = 1,96 \cdot 10^{-3} / (0,45 d) = 9,67 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$$

$$(1/r) = k_r k_\phi (1/r)_0 = 1 \cdot 1,04 \cdot 9,67 \cdot 10^{-6} = 10,0 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$$

$$e_2 = (1/r) \ell_0^2 / 10 = 10,00 \cdot 10^{-6} \cdot 256 \cdot 10^6 / 10 = 256 \text{ mm}$$

$$M_2 = N_{Ed} e_2 = 1000 \cdot 0,256 = 256 \text{ kNm}$$

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2 = 628 + 256 = 884 \text{ kNm}$$

### 5.5.2 Verifica della sezione di incastro

Diagramma d'interazione

Dalla Tavola U14 relativa a  $f_{ck} = 90 \text{ N/mm}^2$ , con  $\omega = 0,28$ , in presenza dello sforzo normale

$$\nu = \frac{1000000}{500 \cdot 500 \cdot 51} = 0,0784, \text{ il momento resistente risulta } \mu = 0,145, \text{ da cui}$$

$$M_{Rd} = 0,145 \cdot 500^3 \cdot 51,6 = 924 \text{ kNm} > M_{Ed}.$$

Calcolo analitico

$$(\beta_1 = 0,583; \beta_2 = 0,353; \varepsilon_{cu2} = 0,0026; \varepsilon_{cu2} E_s = 520 \text{ N/mm}^2)$$

Con riferimento alla figura 7.3 del punto 7.3, si individua il settore in cui la soluzione si colloca. Con la retta 0, per la quale la tensione nell'armatura  $A_{s1}$  è nulla, risulta:

$$N_{Rd} = -0,583 \cdot 500 \cdot 50 \cdot 51 + 4583 \cdot 391 = -743 + 1792 = +1049$$

Con la retta 1 risulta  $x = k_1 d' = 4,06 \cdot 50 = 203 \text{ mm}$  e quindi

$$N_{Rd} = -0,353 \cdot 500 \cdot 203 \cdot 51 = -1287 \text{ kN}$$

La soluzione per  $N = -1000 \text{ kN}$  si colloca nel settore 1. Viene pertanto:

$$x^2 - x \left( \frac{4583 \cdot 391 + 1000000 - 4583 \cdot 520}{0,583 \cdot 500 \cdot 51} \right) - \frac{4583 \cdot 520 \cdot 50}{0,637 \cdot 400 \cdot 39,6} = 0$$

$$\text{La soluzione fornisce } x = 104,3 \text{ mm da cui } \sigma_{s1} = 520 \left( 1 - \frac{50}{104,7} \right) = 270,7 \text{ N/mm}^2$$

Infine, con la (7.7) risulta:

$$M_{Rd} = 4583 \cdot 270,7 (250 - 50) + 0,583 \cdot 500 \cdot 104,3 \cdot 51 (250 - 0,353 \cdot 104,3) + 4583 \cdot 391 (250 - 50) = 937 \text{ kNm} > M_{Ed}.$$

## 5.6 Esempio 5.5 – Colonna di lunghezza 6 m sollecitata in presso flessione deviata (fig. A5.9)

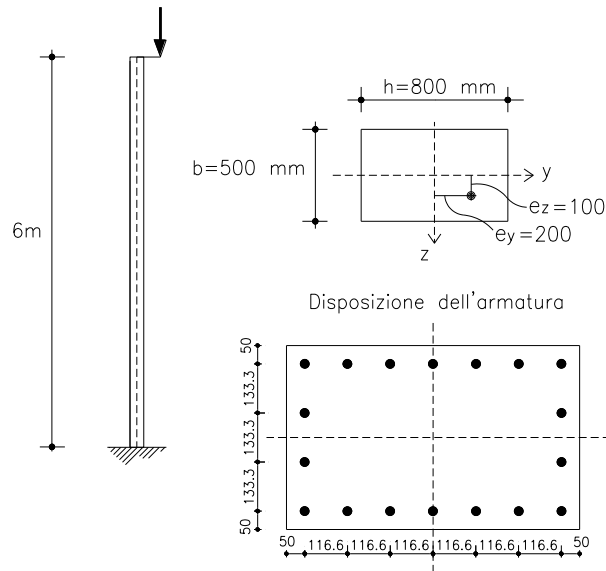
### 5.6.1.1.1 Dati del problema

Sezione rettangolare di lati

$$h = 800 \text{ mm}, b = 500 \text{ mm}$$

Armatura

18 barre di diametro 20 mm distribuite nel modo seguente: 4 su ciascun lembo parallelo al lato minore ( $A_s = 1256 \text{ mm}^2$ ); 5 su ciascun lembo parallelo al lato maggiore ( $A_s = 1571 \text{ mm}^2$ ). Area totale  $A_s = 5654 \text{ mm}^2$  (fig. 5.14)



**Figura A5.9** Esempio 5.5: schema della struttura e disposizione dell'armatura.

Calcestruzzo

$$C30/37; f_{cd} = 0,85 f_{ck}/1,5 = 17,0 \text{ N/mm}^2$$

$$E_{cm} = 32000 \text{ N/mm}^2$$

$$E_{cd} = E_{cm}/1,2 = 26666 \text{ N/mm}^2$$

Lunghezza libera d'inflexione

$$\ell_o = 2 \times 6 = 12 \text{ m}$$

Sollecitazione biassiale allo stato limite ultimo

$$N_{Ed} = 1000 \text{ kN con eccentricità: } e_z = 0,10 \text{ m; } e_y = 0,20 \text{ m}$$

Sollecitazione in esercizio, condizione quasi permanente

$$N_{0Eqp} = 500 \text{ kN con le stesse eccentricità dello stato limite ultimo.}$$

Si segue il procedimento di calcolo del punto [5.8.9(2)]

In primo luogo, pur essendo presente un momento biassiale, si effettuano le verifiche per ciascuna componente con le relative imperfezioni geometriche.

Il punto [5.8.9(3)] afferma che ulteriori verifiche non sono necessarie se i rapporti delle snellezze rispettano le [(5.38a)] e se le eccentricità relative rispettano almeno una delle [(5.38b)]. Si procede pertanto ai calcoli separati per le pressoflessioni secondo  $z$  e secondo  $y$  applicando il metodo della rigidità nominale.

### 5.6.2 Calcoli preliminari

Avendo fissato l'armatura, relativamente a questa si deduce:

- Rapporto geometrico

$$\rho = \frac{A_s}{bh} = \frac{5654}{500 \cdot 800} = 0,0141 < 0,04 \quad [9.5.2(3)]$$

- Rapporto meccanico

$$\omega = \rho \frac{f_{yd}}{f_{cd}} = 0,0141 \cdot \frac{391}{17} = 0,325$$

Dalla Tavola U16 si deduce il valore del momento resistente adimensionale  $\mu$  corrispondente a  $\omega = 0,325$ . Risulta:  $\mu = 0,13$ .

I momenti resistenti della sezione a SLU, che verranno utilizzati nelle verifiche, sono:

$$M_{Rdz} = \mu \cdot bh^2 f_{cd} = 0,13 \cdot 500 \cdot 800^2 \cdot 17 = 707 \text{ kNm}$$

$$M_{Rdy} = \mu \cdot hb^2 f_{cd} = 0,13 \cdot 800 \cdot 500^2 \cdot 17 = 442 \text{ kNm}$$

Sforzo normale adimensionale di progetto:

$$n = v = \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}} = \frac{1000000}{800 \cdot 500 \cdot 17} = 0,1471$$

### 5.6.3 Pressoflessione con rotazione intorno all'asse z

La snellezza limite si calcola con l'espressione:

$$\lambda_{\lim} = 20 \cdot A \cdot B \cdot C / \sqrt{n} \quad [(5.13)]$$

in cui

$$A = 1/(1 + 0,2\varphi_{ef}) = 1/(1 + 0,2 \cdot 1) = 0,833 \quad (\text{per } \varphi_{ef} = 1, \text{ ved. viscosità nel seguito})$$

$$B = \sqrt{1 + 2\omega} = \sqrt{1 + 2 \cdot 0,325} = 1,28$$

$C = 0,7$ , come suggerisce EC2 per strutture non controventate

$$\sqrt{n} = \sqrt{0,1471} = 0,38$$

Risulta

$$\lambda_{\lim} = 20 \cdot 0,833 \cdot 1,28 \cdot 0,7 / 0,38 = 39$$

La snellezza  $\lambda_z$  vale

$$\lambda_z = \frac{12}{(0,8/3,46)} = 51,9 > 39$$

Pertanto è necessario tenere conto degli effetti del secondo ordine.  
Sollecitazioni allo stato limite ultimo

$$N_{Ed} = 1000 \text{ kN}$$

$$M_{0Edz} = 1000 \cdot 0,20 = 200 \text{ kNm}$$

Sollecitazioni in esercizio, combinazione quasi permanente

$$N_{0Eqp} = 500 \text{ kN}$$

$$M_{0Eqp} = 100 \text{ kNm}$$

Viscosità

$$\varphi_{(\infty, t_0)} = 2$$

$$\varphi_{ef} = \varphi_{(\infty, t_0)} \cdot (M_{0Eqp} / M_{0Ed}) = 2 \cdot (100 / 200) = 1,0 \quad [(5.19)]$$

Sollecitazioni dovute a imperfezioni costruttive

Imperfezione verticalità

$$\theta_i = 0,005 \cdot 2 / \sqrt{6} = 0,0045 \quad [(5.1)]$$

$$\theta_i \ell = 25 \text{ mm}$$

Momento delle imperfezioni

$$N_{Ed} \cdot (\theta_i \ell) = 25 \text{ kNm} \quad [(5.2)]$$

Momento totale del primo ordine allo stato limite ultimo

$$M_{Ed} = 225 \text{ kNm}$$

$$I_{sz} = 2 \cdot 1256 \cdot 350^2 + 2 \cdot 2 \cdot 314 \cdot (116,6^2 + 233,3^2) = 393 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$E_s I_{sz} = 200000 \cdot 393 \cdot 10^6 = 7,86 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2$$

$$E_{cd} I_c = 26666 \cdot 800^3 \cdot 500 / 12 = 5,68 \cdot 10^{14} \text{ Nmm}^2$$

$$\lambda_z = 51,9$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{f_{ck}}{20}} = \sqrt{\frac{30}{20}} = 1,22 \quad [(5.23)]$$

$$k_2 = n_{Ed} \cdot \lambda / 170 = 0,1471 \cdot 51,9 / 170 = 0,0449 \quad [(5.24)]$$

$$k_c = k_1 k_2 / (1 + \varphi_{ef}) = 1,22 \cdot 0,0449 / 2 = 0,0274 \quad [(5.22)]$$

$$EI = k_c E_{cd} I_c + E_s I_{sz} = 0,0274 \cdot 5,68 \cdot 10^{14} + 7,86 \cdot 10^{13} = 9,41 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2 \quad [(5.21)]$$

$$N_B = \pi^2 EI / \ell^2 = 9,86 \cdot \frac{9410 \cdot 10^9}{12000^2} = 6443 \text{ kN}$$

Essendo

$$\beta = \pi^2 / c_0 = 1,23 \text{ (con } c_0 = 8, \text{ diagramma } M_1 \text{ uniforme)} \quad [(5.29)]$$

risulta, applicandolo con lieve eccesso anche alle imperfezioni:

$$M_{Edz} = M_{0Edz} \left[ 1 + \frac{\beta}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1} \right] = 225 \left[ 1 + \frac{1,23}{\frac{6443}{1000} - 1} \right] = 276 \text{ kNm} \quad [(5.28)]$$

In termini adimensionali la presso flessione è espressa da:



$$\nu = n_{Ed} = \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}} = \frac{1000000}{800 \cdot 500 \cdot 17} = 0,1471$$

$$\mu = \frac{M_{Edz}}{h^2 b f_{cd}} = \frac{276000000}{800^2 \cdot 500 \cdot 17} = 0,0500$$

Il diagramma d'interazione della tavola U16 dimostra che tale sollecitazione è compatibile con  $\omega = 0,325$ .

#### 5.6.4 Pressoflessione con rotazione intorno all'asse y

La snellezza limite, calcolata con la (5.13N), risulta:

$$\lambda_{lim} = 39$$

$$\lambda_y = \frac{12}{0,5 / 3,46} = 83,0 > 39$$

Occorre tenere conto degli effetti del secondo ordine.

Sollecitazioni allo stato limite ultimo

$$N_{Ed} = 1000 \text{ kN}; \quad n_{Ed} = N_{Ed} / (A_c f_{cd}) = 0,1471$$

$$M_{Ed} = 1000 \cdot 0,10 = 100 \text{ kNm}$$

Sollecitazioni in esercizio, combinazione quasi permanente

$$N_{0Eqp} = 500 \text{ kN}$$

$$M_{0Eqp} = 50 \text{ kNm}$$

Viscosità

$$\varphi_{(\infty, t_0)} = 2$$

$$\varphi_{ef} = \varphi_{(\infty, t_0)} \cdot (M_{0Eqp} / M_{0Ed}) = 2 \cdot (100 / 200) = 1,0 \quad [(5.19)]$$

Sollecitazioni dovute a imperfezioni costruttive

$$M = 25 \text{ kNm}$$

Momento totale del primo ordine allo stato limite ultimo

$$M_{0Edy} = 100 + 25 = 125 \text{ kNm}$$

$$E_{cd} I_c = 26666 \cdot 500^3 \cdot 800 / 12 = 2,22 \cdot 10^{14} \text{ Nmm}^2$$

$$I_{sy} = 2 \cdot 1568 \cdot 200^2 + 2 \cdot 2 \cdot 314 \cdot (66^2 + 200^2) = 181 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$E_s I_{sy} = 200000 \cdot 181 \cdot 10^6 = 3,62 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2$$

$$\lambda_z = 83,0$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{f_{ck}}{20}} = 1,22 \quad [(5.23)]$$

$$k_2 = n_{Ed} \lambda / 170 = 0,1471 \cdot 83 / 170 = 0,0718 \quad [(5.24)]$$

$$k_c = k_1 \cdot k_2 / (1 + \varphi_{ef}) = 1,22 \cdot 0,0718 / 2 = 0,0438 \quad [(5.22)]$$

$$EI = k_c E_{cd} I_c + E_s I_{sy} = 0,0438 \cdot 22,2 \cdot 10^{13} + 3,62 \cdot 10^{13} = 4,59 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2$$

$$N_B = \pi^2 EI / \ell^2_0 = 9,86 \cdot \frac{45,9 \cdot 10^{12}}{12000^2} = 3142 \text{ kN}$$

Essendo

$$\beta = \pi^2 / c_0 = 1,23$$

con  $c_0 = 8$ , diagramma  $M_1$  uniforme applicato con lieve eccesso anche alle imperfezioni, risulta:

$$M_{Edy} = M_{0Ed} \left[ 1 + \frac{\beta}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1} \right] = 125 \left[ 1 + \frac{1,23}{\frac{3142}{1000} - 1} \right] = 197 \text{ kNm}$$

In termini adimensionali la pressoflessione è espressa da:

$$\nu = n_{Ed} = \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}} = \frac{1000000}{800 \cdot 500 \cdot 17} = 0,1471$$

$$\mu = \frac{M_{Edy}}{hb^2 f_{cd}} = \frac{197000000}{800 \cdot 500^2 \cdot 17} = 0,0579$$

Il diagramma d'interazione della tavola U16 dimostra che tale sollecitazione è compatibile con  $\omega = 0,325$ .

### 5.6.5 Verifica delle condizioni per l'ammissibilità delle verifiche separate

Per la [(5.38a)]

$$\frac{\lambda_y}{\lambda_z} = \frac{83,0}{51,9} = 1,6 \leq 2$$

$$\frac{\lambda_z}{\lambda_y} = \frac{51,9}{83,0} = 0,62 \leq 2$$

Pertanto la [5.38a] è soddisfatta.

$$\frac{e_y}{h} = \frac{200}{800} = 0,25; \quad \frac{e_z}{b} = \frac{100}{500} = 0,20$$

Essendo

$$\frac{0,25}{0,20} = 1,25 > 0,2 \quad \text{e} \quad \frac{0,20}{0,25} = 0,8 > 0,2$$

la [(5.38b)] non è soddisfatta. Si applica allora la [(5.39)] del punto [5.8.9(4)]

Elemento preliminare: calcolo di  $(N_{Ed} / N_{Rd})$

$$N_{Rd} = A_c f_{cd} + A_s f_{yd} = 800 \cdot 500 \cdot 17 + 5654 \cdot 391 = 9010 \text{ kN}$$

$$N_{Ed} / N_{Rd} = 1000 / 9010 = 0,11$$

Si adotta, per interpolazione, l'esponente  $a = 1,0083$

Risulta con la [(5.39)]:

$$\left( \frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}} \right)^{1,0083} + \left( \frac{M_{Edy}}{M_{Rdy}} \right)^{1,0083} = 0,3874 + 0,4427 = 0,8301 < 1$$

La verifica è pertanto soddisfatta.

## 5.7 Esempio 6 – Colonna di lunghezza 6 m sollecitata in presso flessione deviata (fig. A5.10)

### 5.7.1 Dati del problema

Sezione quadrata di lato

$$h = 500 \text{ mm}$$

Armatura distribuita uniformemente sui 4 lati (  $28\phi 20$  ) con

$$d' = 50 \text{ mm}$$

Calcestruzzo

$$C 40/50; f_{cd} = 22,66 \text{ N/mm}^2$$

$$E_{cm} = 35000 \text{ N/mm}^2; E_{cd} = E_{cm}/1,2 = 29160 \text{ N/mm}^2 \text{ [5.20]}$$

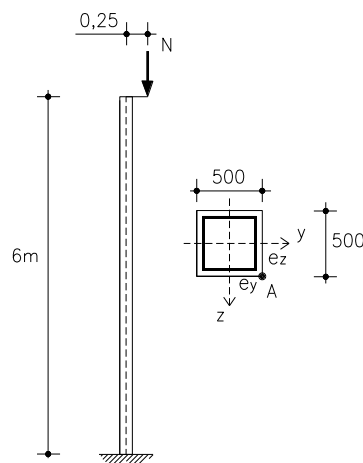
Sollecitazione a SLU

$$\text{Forza assiale } N_{Ed} = 900 \text{ kN con } e_{z0} = 0,250 \text{ m}, e_{y0} = 0,250 \text{ m}$$

Sollecitazione a SLE combinazione quasi permanente

$$N_{0Eqp} = 450 \text{ kN con le stesse eccentricità dello SLU}$$

### 5.7.2 Calcoli preliminari



**Figura A5.10** Esempio 6: schema della struttura.

Lunghezza libera d'inflessione

$$\ell_0 = 2 \times 6 = 12 \text{ m}$$

Snellezze

$$\lambda_y = \lambda_z = \frac{\ell_0}{(h/3,46)} = \frac{12000}{(500/3,46)} = 83$$

Sollecitazione biassiale di primo ordine allo stato limite ultimo

$N_{Ed} = 900 \text{ kN}$  con eccentricità:  $e_{z0} = e_{y0} = 250 \text{ mm}$  applicata nel punto A della sezione

$$n_{Ed} = N_{Ed}/(A_c \cdot f_{cd}) = \frac{900000}{500^2 \cdot 22,66} = 0,1589$$

$$M_{Edy} = M_{Edz} = N_{Ed} e = 900 \cdot 0,25 = 225 \text{ kNm}$$

Sollecitazioni dovute ad imperfezioni costruttive

Imperfezioni sulla verticalità

$$\theta_i = 0,005 \cdot 2 / \sqrt{6} = 0,0041$$

$$\theta_i \ell = 0,025 \text{ m}$$

Momento dovuto alle imperfezioni

$$N_{Ed} (\theta_i \ell) = 900 \cdot 0,025 = 22,5 \text{ kNm}$$

Momento totale del primo ordine monoassiale allo stato limite ultimo

$$M_{Ed} = 225,0 + 22,5 = 247,5 \text{ kNm}$$

Sollecitazione in esercizio, combinazione quasi permanente

$$N_{0Eqp} = 450 \text{ kN con le stesse eccentricità}$$

$$M_{0Eqp} = 112,5 \text{ kNm (sia secondo } y \text{ che secondo } z)$$

Viscosità

$$\varphi_{(\infty, t_0)} = 2,5$$

$$\varphi_{ef} = \varphi_{(\infty, t_0)} (M_{0Eqp}/M_{0Ed}) = (112,5/247,5) \cdot 2,5 = 1,13$$

Si osserva che, data la simmetria della sezione e delle sollecitazioni, le [(5.38)] sono verificate mentre nessuna delle due [5.38b] lo è. Infatti  $\frac{e_y/h}{e_z/b} = \frac{0,5}{0,5} = 1 > 0,2$ . È pertanto necessario tenere conto della flessione deviata e procedere secondo il punto [5.8.9(4)].

### 5.7.3 Determinazione delle sollecitazioni totali monoassiali a stato limite ultimo.

Si procede con il metodo della rigidezza nominale.

Calcestruzzo

$$I_c = 5208,3 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\lambda_z = 83$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{40}{20}} = 1,41$$

$$k_2 = n_{Ed} \lambda / 170 = 0,1589 \cdot 83 / 170 = 0,07769$$

$$k_c = k_1 k_2 / (1 + \varphi_{ef}) = 1,41 \cdot 0,0776 / (1 + 1,13) = 0,0514$$

$$k_c E_{cd} I_c = 0,0514 \cdot 29160 \cdot 5208,3 \cdot 10^6 = 0,78 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2$$

Acciaio

$$A_s = 28 \cdot 314 = 8796 \text{ mm}^2$$

$$\rho = \frac{8796}{500^2} = 0,0352 < 0,04 ; \omega = 0,0352 \frac{391}{22,66} = 0,60$$

Si indica con  $A_s^*$  l'area distribuita su un lato, ossia essendo  $A_s$  l'area totale, risulta  $A_s^* = A_s/4$ . Sia inoltre  $q = A_s^*/400$  l'armatura per unità di lunghezza.

Risulta pertanto:

$$A_s^* = A_s/4 = \frac{8796}{4} = 2200 \text{ mm}^2$$

$$q = A_s^*/400 = \frac{2200}{400} = 5,5 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

Il momento di inerzia  $I_s$  dell'armatura rispetto a un asse baricentrico parallelo a una coppia di lati si scrive:

$$I_s = 2 \cdot A_s^* \cdot \left(\frac{h}{2} - d'\right)^2 + 2q \cdot \frac{(h - 2d')^3}{12} = 2 \cdot 2200 \cdot (200)^2 + 2 \cdot 5,50 \cdot \frac{(400)^3}{12} =$$

$$= 234,6 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$E_s I_s = 234,6 \cdot 10^6 \cdot 200000 = 4,69 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2$$

Infine

$$EI = 0,78 \cdot 10^{13} + 4,69 \cdot 10^{13} = 5,47 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2$$

$$N_B = \pi^2 EI/l_0^2 = 9,86 \cdot \frac{5,47 \cdot 10^{13}}{12000^2} = 3748 \text{ Kn}$$

Risulta:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} \left[ 1 + \frac{\beta}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1} \right] = 247,5 \cdot \left[ 1 + \frac{1,23}{\frac{3748}{900} - 1} \right] = 344,0 \text{ kNm}$$

$$N_{Rd} = 500^2 \cdot 22,66 (1 + \omega) = 9064 \text{ kN}$$

$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} = \frac{900}{9064} = 0,1$$

Dal diagramma di interazione (Tavola U16) il momento resistente  $\mu_{Rd}$  associato a  $\nu = n_{Ed} = 0,1589$  e ad  $\omega = 0,60$ , risulta  $\mu_{Rd} = 0,26$ .

Pertanto il momento resistente vale  $M_{Rd} = 0,26 \cdot 500^3 \cdot 22,66 = 736,4 \text{ kNm}$ .

#### 5.7.4 Verifica biassiale

Secondo il punto [5.8.9(4)] al valore 0,1 del rapporto  $\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}}$  corrisponde l'esponente 1 da introdurre nella [(5.39)]. Questa, essendo i momenti secondo gli assi y e z uguali fra loro, risulta

$$2 \cdot \left( \frac{344,0}{736,4} \right)^1 = 0,934 < 1$$

La verifica è soddisfatta.

### 5.8 Esempio 7 – Verifica di un pilastro inserito in una struttura

Con riferimento alla figura 5.3 si assumono gli elementi geometrici ivi rappresentati con le loro dimensioni e vincoli. Unica eccezione: l'altezza dell'interpiano pari a m 5,00 anziché m 3,00.

- Forza assiale che cimenta il pilastro: 500 kN
- Momenti di estremità  $M_{02} = 75 \text{ kNm}$ ,  $M_{01} = 50 \text{ kNm}$  (momenti di uguale segno che tendono le fibre poste sullo stesso lato)
- Materiali: Calcestruzzo C25/30;  $f_{cd} = 14,16 \text{ N/mm}^2$ ;  $E_{cm} = 31000 \text{ kN/mm}^2$   
Acciaio  $f_{yd} = 391 \text{ N/mm}^2$
- Pilastro di sezione quadrata di lato 350 mm

Armatura del pilastro: 8 barre di diametro 14 mm, (ai 4 angoli e in mezzzeria dei lati della sezione):  $A_s = 1232 \text{ mm}^2$ ; ne risultano una percentuale geometrica e meccanica di armatura pari rispettivamente a:

$$\rho = \frac{1232}{350^2} = 0,01; \quad \omega = 0,01 \cdot 391 / 14,16 = 0,277$$

Per la verifica a presso flessione, tenendo conto solo delle (3 + 3) barre sui lati opposti, risulta  $\omega = (6/8) \cdot (0,01 \cdot 391 / 14,16) = 0,208$ .

Calcolo delle flessibilità  $k_1$  e  $k_2$  relative ai nodi superiore e inferiore

Si suppone lo stesso modulo elastico per le travi e la colonna. Per quanto concerne i momenti d'inerzia si assumono quelli calcolati al punto 5.4.1.2 che vengono qui riportati:

- per il pilastro:  $I_c = 12,5 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$
- per le travi:  $I_{\text{trave}} = 5,20 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$ , valore che tiene conto, in una certa misura, della fessurazione.

Applicando le formule riportate al punto 5.4.1.1 si ottiene:

$$k_1 = \frac{(12,50 \cdot 10^8 / 5000) \cdot 2}{3 \cdot 5,20 \cdot 10^8 / 4500 + 4 \cdot 5,20 \cdot 10^8 / 5000} = 0,65$$

$$k_2 = \frac{(12,50 \cdot 10^8 / 5000) \cdot 2}{4 \cdot 5,20 \cdot 10^8 / 4500 + 4 \cdot 5,20 \cdot 10^8 / 5000} = 0,57$$

La lunghezza libera d'inflexione con la formula [(5.15)] risulta:

$$\ell_0 = 0,50 \cdot 5,0 \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{0,65}{0,45 + 0,65}\right) \cdot \left(1 + \frac{0,57}{0,45 + 0,57}\right)} = 3,94 \text{ m}$$

La snellezza del pilastro vale:

$$\lambda = \frac{\ell_0}{i} = \frac{3940}{350/3,46} = 39$$

Con le tabelle della BSI per colonne controventate (punto 5.4.1.1.1), con le condizioni di sommità 2 e di base 2, alle quali corrisponde  $\beta = 0,85$  si ottiene la lunghezza libera d'inflexione  $\ell_o = 0,85 \cdot 5,00 = 4,25 \text{ m}$  e la snellezza

$$\lambda = \frac{4250}{350/3,46} = 42$$

Si adotterà questa perché più impegnativa.

La snellezza limite è data dalla relazione

$$\lambda_{\text{lim}} = 20 \cdot A \cdot B \cdot C / \sqrt{n} \quad [(5.13N)]$$

essendo:

$$A = 1/(1 + 0,2 \cdot \varphi_{\text{ef}}) = 1/(1 + 0,2 \cdot 1) = 0,833$$

(per  $\varphi_{\text{ef}} = 1$  vedere il punto successivo)

$$B = \sqrt{1 + 2 \cdot 0,277} = 1,246$$

$$C = 1,7 - \frac{50}{75} = 1,033$$

$$n = \frac{500000}{350 \cdot 350 \cdot 14,16} = 0,2883; \quad \sqrt{0,2883} = 0,5369$$

Risulta

$$\lambda_{\text{lim}} = 20 \cdot 0,833 \cdot 1,246 \cdot 1,033 / 0,5369 = 39,9 < \lambda$$

Si terrà conto degli effetti del secondo ordine.

### 5.8.1 Metodo della curvatura nominale

Sollecitazioni del primo ordine:

Per la [(5.32)] il momento equivalente vale:

$$M_{0e} = 0,6 M_{02} + 0,4 M_{01} = 0,6 \cdot 75 + 0,4 \cdot 50 = 65 \text{ kNm} > 0,4 \cdot 75 = 60 \text{ kNm}$$

Momento dovuto alle imperfezioni geometriche:

Secondo il punto [5.2.(9)] nel caso di colonne isolate in strutture controventate (come è il caso in studio), l'effetto delle imperfezioni geometriche può essere preso in conto con un'eccentricità

$$e_i = \frac{\ell_0}{400}$$

Risulta allora, con  $\ell_0 = 4250 \text{ mm}$

$$e_i = \frac{4250}{400} = 10,6 \text{ mm} = 0,0106 \text{ m}$$

e il momento

$$M_{\text{imp}} = 500 \times 0,010 = 5,0 \text{ kNm}$$

Momento complessivo del primo ordine:

$$M_0 = 65,0 + 5,0 = 70,0 \text{ kNm}$$

Calcolo dell'eccentricità del secondo ordine

$$e_2 = (1/r) \cdot \ell_0^2 / c$$

dove:

$$\frac{1}{r} = K_r K_\varphi \cdot \frac{1}{r_0} \quad \text{e} \quad (1/r_0) = \varepsilon_{yd} / (0,45d)$$

$$K_r = 1 \quad \text{essendo} \quad n = \frac{N}{A_c f_{cd}} = \frac{500000}{350^2 \cdot 14,16} = 0,288 < n_{bal} = 0,4$$

$$K_\varphi = 1 + \beta \varphi_{ef} \quad [(5.37)]$$

$$\beta = 0,35 + f_{ck} / 200 - \lambda / 150 = 0,195$$

$$\varphi_{ef} = \varphi_{(\infty, t_0)} \cdot (M_{Eqp} / M_{0Ed}) = 2 \cdot (0,5) = 1$$

$$K_\varphi = 1 + 0,195 \cdot 1 = 1,195$$

$$(1/r) = 1,195 \cdot \frac{391}{200000} \cdot \frac{1}{0,45 \cdot 315} = 16,5 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$$

e, con  $c = 10$

$$e_2 = 16,5 \cdot 10^{-6} \cdot 4,25^2 \cdot 10^6 / 10 = 30 \text{ mm}$$

Il momento del secondo ordine vale pertanto:

$$M_2 = 500 \times 0,030 = 15,0 \text{ kNm}$$

Il momento sollecitante complessivo vale

$$M_{Ed} = 70,0 + 15,0 = 85,0 \text{ kNm}$$



### 5.8.2 Metodo della rigidezza nominale

Calcolo della rigidezza:

$$EI = K_c E_{cd} I_c + K_s I_s \quad [(5.21)]$$

e con la [(5.22)]

$$K_c = k_1 k_2 / (1 + \varphi_{ef}) \quad ; \quad K_s = 1$$

$$k_1 = \sqrt{25/20} = 1,12$$

$$n = 0,288 \quad (\text{dal metodo della curvatura nominale})$$

$$k_2 = n \frac{\lambda}{170} = 0,288 \cdot \frac{42}{170} = 0,07$$

$$\varphi_{ef} = \varphi_{(\infty, t_o)} \cdot (M_{Eqp} / M_{oEd}) = 2 \times (0,5) = 1$$

$$K_c = 1,12 \cdot 0,07 / (1 + 1) = 0,039$$

$$I_c = \frac{350^4}{12} = 1,25 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

$$E_{cd} = \frac{E_{cm}}{1,2} = \frac{31000}{1,2} = 25800 \text{ N/mm}^2$$

$$I_s = 2 \cdot 462 \cdot 135^2 = 16,8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$EI = 25800 \cdot 1,25 \cdot 10^9 \cdot 0,039 + 200000 \cdot 16,8 \cdot 10^6 = 4,61 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

Il carico critico euleriano vale:

$$N_b = \frac{9,86 \cdot 4,61 \cdot 10^{12}}{4250^2} = 2516 \text{ kN}$$

Momento totale del primo ordine:  $65,0 + 5,0 = 70,0 \text{ kNm}$ , comprensivo delle imperfezioni geometriche.

Tenuto presente che il diagramma  $M$  è da ritenersi uniforme, con  $\beta = 1,23$ , il momento sollecitante ultimo risulta:

$$M = 70,0 \cdot \left[ 1 + \frac{1,23}{\frac{2516}{500} - 1} \right] = 87,0 \text{ kNm}$$

### 5.8.3 Verifica

Con i due metodi di calcolo sono risultati momenti sollecitanti pari rispettivamente a 85 e 87 kNm. In termini adimensionali le sollecitazioni per il secondo calcolo sono:

$$\nu = \frac{500000}{350^2 \cdot 14,16} = 0,288 \quad ; \quad \mu = \frac{87 \cdot 10^6}{350^3 \cdot 14,16} = 0,143$$

Facendo ricorso al diagramma d'interazione della figura U.10 dell'Appendice, la coppia di sollecitazioni sopra calcolate richiede  $\omega = 0,12$ . Come riportato al paragrafo 5.5.4.7, il rapporto meccanico disposto è pari a 0,208, maggiore di quello richiesto.

La verifica è pertanto soddisfatta.

### 5.8.4 Sintesi degli esempi sviluppati

Tenuto conto della pluralità dei procedimenti di calcolo adottati negli esempi presentati, nel prospetto A5.3 se ne riporta un quadro complessivo.

**Prospetto A5.3** Sintesi degli esempi sviluppati.

Esempio	Metodo della rigidità nominale			Metodo della curvatura nominale	Metodo generale	Metodo della rigidità nominale (biassiale)
	Diretto	Equazione differenziale	Spostamento retta			
1	<b>x</b>	<b>x</b>	<b>x</b>	<b>x</b>	<b>x</b>	–
2	<b>x</b>	<b>x</b>	<b>x</b>	<b>x</b>	–	–
3	<b>x</b>	<b>x</b>	<b>x</b>	<b>x</b>	<b>x</b>	–
4	<b>x</b>	<b>x</b>	<b>x</b>	<b>x</b>	–	–
4bis	<b>x</b>	<b>x</b>	<b>x</b>	–	–	–
5	–	–	–	–	–	<b>x</b>
6	–	–	–	–	–	<b>x</b>
7	<b>x</b>	–	–	<b>x</b>	–	–