

Esempi svolti relativi al capitolo 8

Stato limite ultimo per taglio e torsione

8.1	Esempi di verifica di travi dotate di armature trasversali (Tema 1).....	A8.3
8.1.1	Esempio 8.1.1 - Staffe verticali di diametro 6 mm a 2 bracci, $s = 200$ mm.....	A8.3
8.1.2	Esempio 8.1.2 - Staffe verticali di diametro 6 mm a 2 bracci, $s = 150$ mm.....	A8.3
8.1.3	Esempio 8.1.3 - Staffe verticali di diametro 8 mm a 2 bracci, $s = 150$ mm.....	A8.4
8.1.4	Esempio 8.1.4 - Staffe verticali di diametro 10 mm a 2 bracci, $s = 150$ mm.....	A8.4
8.1.5	Esempio 8.1.5 - Staffe verticali di diametro 12 mm a 2 bracci, $s = 150$ mm.....	A8.4
8.1.6	Esempio 8.1.6 - Staffe verticali di diametro 12 mm a 2 bracci, $s = 150$ mm.....	A8.5
8.1.7	Esempio 8.1.7 - Staffe inclinate di diametro 12 mm a 2 bracci, $\alpha = \pi/4$ ($\text{sen}\alpha = 0,707$; $\text{cot}\alpha = 1,0$), $s = 150$ mm.....	A8.5
8.2	Esempi di progetto delle armature (Tema 2)	A8.6
8.2.1	Esempio 8.2.1	A8.6
8.2.2	Esempio 8.2.2	A8.7
8.2.3	Esempio 8.2.3	A8.7
8.2.4	Esempio 8.2.4.....	A8.8
8.2.5	Esempio 8.2.5 – Determinazione del momento torcente resistente	A8.8
8.2.6	Esempio 8.2.6 – Progetto delle armature per torsione	A8.9
8.2.7	Esempio 8.2.7 – Trave soggetta a taglio, torsione e flessione	A8.10

8.1 Esempi di verifica di travi dotate di armature trasversali (Tema 1)

Materiali

I calcestruzzi presi in considerazione negli esempi hanno resistenze $f_{ck} = 20-40-60 \text{ N/mm}^2$ e i relativi parametri che interessano sono raccolti nel prospetto A8.1.

Le armature sono caratterizzate da $f_{yk} = 450 \text{ N/mm}^2$; $f_{ywd} = 391 \text{ N/mm}^2$.

Gli esempi si riferiscono a sezioni rettangolari o a T aventi le seguenti caratteristiche:

$h = 600 \text{ mm}$; $d = 550 \text{ mm}$; $z = 500 \text{ mm}$; $b_w = 150 \text{ mm}$

Si adotta $v=0.5$

Prospetto A8.1 Valori di f_{cd} e $v f_{cd}$.

$f_{ck} \text{ (N/mm}^2\text{)}$	$f_{cd} \text{ (N/mm}^2\text{)}$	$v f_{cd} \text{ (N/mm}^2\text{)}$
20	11,33	5,66
40	22,66	11,33
60	34,00	17,00

8.1.1 Esempio 8.1.1 - Staffe verticali di diametro 6 mm a 2 bracci, $s = 200 \text{ mm}$

Calcestruzzo: C20/25; $f_{cd} = 11,33 \text{ N/mm}^2$

$$A_{sw}/s = 56,5/200 = 0,28 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{s \cdot b_w} = \frac{56,5}{150 \cdot 200} = 0,0019 > \rho_{w,min} = \frac{(0,08 \sqrt{f_{ck}})}{f_{yk}} = 0,00079$$

Verifica della duttilità con la [(6.12)]

$$\omega_t = \frac{A_{sw} \cdot f_{yd}}{b_w \cdot s \cdot v f_{cd}} = \frac{56,5 \cdot 391}{150 \cdot 200 \cdot 5,66} = 0,130 < 0,5, \text{ verificata}$$

$$\theta = \arcsen \sqrt{0,130} = 21,13^\circ < 21,8^\circ$$

Allo SLU le bielle di calcestruzzo non raggiungono il collasso.

Imponendo $\cot \theta = 2,50$, la [(6.8)] porge:

$$V_{Rd} = \frac{A_{sw}}{s} z \cdot f_{yd} \cdot \cot \theta = 0,28 \cdot 500 \cdot 391 \cdot 2,50 = 136,8 \text{ kN}$$

8.1.2 Esempio 8.1.2 - Staffe verticali di diametro 6 mm a 2 bracci, $s = 150 \text{ mm}$

Calcestruzzo: C20/25; $f_{cd} = 11,33 \text{ N/mm}^2$

$$A_{sw}/s = 56,5/150 = 0,37 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

$$\rho_w = 0,0025 > \rho_{w,min} = 0,00079$$

Verifica della duttilità con la [(6.12)]

$$\omega_t = \frac{56,5 \cdot 391}{150 \cdot 150 \cdot 5,66} = 0,1735 < 0,5, \text{ verificata}$$

$$\theta = \arcsen \sqrt{0,1735} = 24,61^\circ; \cot \theta = 2,18$$

$$V_{Rd} = 0,37 \cdot 500 \cdot 391 \cdot 2,18 = 158 \text{ kN}$$

8.1.3 Esempio 8.1.3 - Staffe verticali di diametro 8 mm a 2 bracci, s = 150 mm

Calcestruzzo: C20/25; $f_{cd} = 11,33 \text{ N/mm}^2$

$$A_{sw}/s = 100/150 = 0,66 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

$$\rho_w = 0,0044 > \rho_{w,\min} = 0,00079$$

Per la [(6.12)]:

$$\omega_t = \frac{100 \cdot 391}{150 \cdot 150 \cdot 5,66} = 0,307 < 0,5, \text{ verificato}$$

$$\theta = \arcsen \sqrt{0,307} = 33,6^\circ > 21,8^\circ; \cot \theta = 1,50$$

$$V_{Rd} = 0,66 \cdot 500 \cdot 391 \cdot 1,50 = 193 \text{ kN}$$

8.1.4 Esempio 8.1.4 - Staffe verticali di diametro 10 mm a 2 bracci, s = 150 mm

Calcestruzzo: C40/50; $f_{cd} = 22,66 \text{ N/mm}^2$

$$A_{sw}/s = 157/150 = 1,04 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

$$\rho_w = \frac{157}{150 \cdot 150} = 0,0069 > \rho_{w,\min} = 0,00112$$

Per la [(6.12)]:

$$\omega_t = \frac{157 \cdot 391}{150 \cdot 150 \cdot 11,33} = 0,241 < 0,5, \text{ verificato}$$

$$\theta = \arcsen \sqrt{0,241} = 29,38^\circ > 21,8^\circ; \cot \theta = 1,77$$

$$V_{Rd} = 1,04 \cdot 500 \cdot 391 \cdot 1,77 = 360 \text{ kN}$$

8.1.5 Esempio 8.1.5 - Staffe verticali di diametro 12 mm a 2 bracci, s = 150 mm

Calcestruzzo: C20/25; $f_{cd} = 11,33 \text{ N/mm}^2$

$$A_{sw}/s = 226/150 = 1,50 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

$$\rho_w = 0,010 > \rho_{w,\min} = 0,00079$$

Per la [(6.12)]:

$$\omega_t = \frac{226 \cdot 391}{150 \cdot 150 \cdot 5,66} = 0,69 > 0,5$$

che denota duttilità insufficiente. La rottura avviene lato calcestruzzo con le staffe in campo elastico (rottura fragile).

Con la [(6.9)] e $\cot\theta = 1,0$ si ottiene:

$$V_{Rd} = 150 \cdot 500 \cdot 5,66 / (1 + 1) = 212,25 \text{ kN}$$

Dalla [(6.8)] scritta sostituendo f_{yd} con σ_s , risulta:

$$\sigma_s = \frac{212250}{1,50 \cdot 500 \cdot 1,0} = 283 \text{ N/mm}^2$$

8.1.6 Esempio 8.1.6 - Staffe verticali di diametro 12 mm a 2 bracci, $s = 150$ mm

Calcestruzzo: C60/75; $f_{cd} = 34,0 \text{ N/mm}^2$

$$A_{sw}/s = 226/150 = 1,50 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

$$\rho_w = 0,010 > \rho_{w,\min} = (0,08\sqrt{60})/450 = 0,0014$$

Per la [(6.12)]:

$$\omega_t = \frac{226 \cdot 391}{150 \cdot 150 \cdot 17,0} = 0,231 < 0,5$$

$$\theta = \arcsen\sqrt{0,231} = 28,7^\circ > 21,8^\circ; \cot\theta = 1,82$$

$$V_{Rd} = 1,50 \cdot 500 \cdot 391 \cdot 1,82 = 534 \text{ kN}$$

8.1.7 Esempio 8.1.7 - Staffe inclinate di diametro 12 mm a 2 bracci, $\alpha = \pi/4$ ($\sin\alpha = 0,707$; $\cot\alpha = 1,0$), $s = 150$ mm

Calcestruzzo: C40/50; $f_{cd} = 22,66 \text{ N/mm}^2$

$$A_{sw}/s = 226/150 = 1,50 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

$$\rho_w = \frac{226}{150 \cdot 150 \cdot 0,707} = 0,0141 > \rho_{w,\min} = 0,00112 \text{ (ved. par. 8.1.4., esempio 8.1.4)}$$

Per la [(6.15)]:

$$\omega_t = \frac{226 \cdot 391}{150 \cdot 150 \cdot 11,33} = 0,3466$$

$$\omega_t \sin\alpha = 0,3466 \cdot 0,707 = 0,245 < 0,5$$

$$\theta = \arcsen\sqrt{0,245} = 29,7^\circ > 21,8^\circ; \cot\theta = 1,75$$

e con la [(6.13)]:

$$V_{Rd} = 1,50 \cdot 500 \cdot 391 \cdot (1,75 + 1,0) \cdot 0,707 = 570 \text{ kN}$$

8.1.7.1 Sintesi dei risultati (Tema 1)**Prospetto A8.2** Sintesi dei risultati del Tema 1 (verifica).

	f_{ck}	A_{sw}/s	$\cot\theta$	V_{Rd} (kN)	Note
Esempio 8.1.1 ($\alpha=\pi/2$)	20	56,5/200	2,50	136,8	bielle integre
Esempio 8.1.2 ($\alpha=\pi/2$)	20	56,5/150	2,18	158,0	
Esempio 8.1.3 ($\alpha=\pi/2$)	20	100/150	1,50	193,0	
Esempio 8.1.4 ($\alpha=\pi/2$)	40	157/150	1,77	360,0	
Esempio 8.1.5 ($\alpha=\pi/2$)	20	226/150	1,00	212,2	rott.fragile
Esempio 8.1.6 ($\alpha=\pi/2$)	60	226/150	1,82	534,0	
Esempio 8.1.7 ($\alpha=\pi/4$)	40	226/150	1,75	570,0	

8.2 Esempi di progetto delle armature (Tema 2)

Gli esempi si riferiscono a sezioni rettangolari o a T aventi le seguenti caratteristiche: $b_w = 200$ mm; $h = 800$ mm; $d = 750$ mm; $z = 675$ mm.

Calcestruzzi di vari f_{ck} . I valori di f_{cd} e ηf_{cd} sono riportati nel prospetto A8.1.

8.2.1 Esempio 8.2.1

Dati:

$V_{Ed} = 400$ kN; staffe verticali

C20/25; $f_{cd} = 11,33$ N/mm²

$$k = \frac{2 \cdot 400000}{200 \cdot 675 \cdot 5,66} = 1,05 > 1$$

$k > 1$ significa $V_{Ed} > V_{Rd,max}$

Occorre pertanto modificare la sezione resistente, per esempio aumentando lo spessore b_w a 220 mm.

Risulta allora:

$$k = \frac{2 \cdot 400000}{220 \cdot 675 \cdot 5,66} = 0,95 < 1$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arcsen k = \frac{1}{2} \arcsen 0,95 = 35,9^\circ > 21,8^\circ; \cot\theta = 1,38$$

Dalla [(6.8)]

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed}}{z \cdot f_{ywd} \cdot \cot\theta} = \frac{400000}{675 \cdot 391 \cdot 1,38} = 1,10 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

soddisfatta, per esempio, con staffe di diametro 10 mm a 2 bracci, $s = 140$ mm. Inoltre:

$$\Delta F_{td} = \frac{V_{Ed}}{2} \cdot \cot\theta = \frac{400}{2} \cdot 1,38 = 276 \text{ kN}$$

8.2.2 Esempio 8.2.2

Dati:

 $V_{Ed} = 500 \text{ kN}$; staffe verticali.

Calcestruzzo: C40/50

$$k = \frac{2 \cdot 500000}{200 \cdot 675 \cdot 11,33} = 0,654 < 1$$

se $k < 0,69$ = collasso solo lato acciaio

$$\theta = \frac{1}{2} \arcsen k = \frac{1}{2} \arcsen 0,654 = 20,4^\circ < 21,8^\circ$$

Si assume $\cot \theta = 2,50$

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed}}{z \cdot f_{ywd} \cdot \cot \theta} = \frac{500000}{675 \cdot 391 \cdot 2,50} = 0,76 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

Disponendo staffe di diametro 12 mm a 2 bracci, $s = 300 \text{ mm}$, la soluzione soddisfa la [(9.5N)]. Infatti

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{s \cdot b_w} = \frac{113 \cdot 2}{300 \cdot 200} = 0,0038 > \frac{(0,08\sqrt{40})}{450} = 0,0011$$

La soluzione soddisfa anche la [(9.6N)], essendo

$$s = 300 < 0,75 \cdot d(1 + \cot \alpha) = 0,75 \cdot 750 = 562,5 \text{ mm}$$

$$\Delta F_{td} = \frac{V_{Ed}}{2} \cdot \cot \theta = \frac{500}{2} \cdot 2,50 = 625,0 \text{ kN}$$

8.2.3 Esempio 8.2.3

Dati:

 $V_{Ed} = 750 \text{ kN}$; staffe verticali.

Calcestruzzo: C60/75

$$k = \frac{2 \cdot 750000}{200 \cdot 675 \cdot 17,0} = 0,654 < 1$$

Poiché $k < 0,69$ il collasso avviene solo lato acciaio.

$$\theta = \frac{1}{2} \arcsen k = 20,4^\circ < 21,8^\circ; \text{ si assume } \cot \theta = 2,5$$

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed}}{z \cdot f_{ywd} \cdot \cot \theta} = \frac{750000}{675 \cdot 391 \cdot 2,5} = 1,14 \text{ mm}^2/\text{mm};$$

$$\rho_w = 0,0057 > \rho_{w,\min} = 0,00138$$

soddisfatta con staffe di diametro 12 mm a 2 bracci, $s = 180 \text{ mm}$. Infine:

$$\Delta F_{td} = \frac{V_{Ed}}{2} \cdot \cot \theta = \frac{750}{2} \cdot 2,5 = 937,5 \text{ kN}$$

8.2.4 Esempio 8.2.4

Dati:

 $V_{Ed} = 750$ kN; staffe inclinate a 45° ($\sin\alpha = 0,707$; $\cot\alpha = 1,0$).

Calcestruzzo: C40/50

$$k = \frac{2 \cdot 750000}{200 \cdot 675 \cdot 11,33} = 0,98 < 1 + \cot\alpha = 2$$

$$\cot\theta = \left[\frac{1}{0,98} + \sqrt{\left(\frac{1}{0,98}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{0,98} - 1} \right] = 2,46 \quad \text{da cui } \theta = 22,1^\circ > 21,8^\circ$$

Dalla [(6.13)]

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{750000}{675 \cdot 391 \cdot (2,46 + 1) \cdot 0,707} = 1,16 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

Disponendo staffe di diametro 12 mm ogni 200 mm ($\frac{A_{sw}}{s} = 1,13 \cong 1,16 \text{ mm}^2/\text{mm}$), la soluzione soddisfa la [(9.5N)]. Infatti

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{s \cdot b_w \cdot \sin\alpha} = \frac{1,16}{200 \cdot 0,707} = 0,0082 > \frac{(0,08\sqrt{40})}{450} = 0,0011$$

$$\Delta F_{td} = \frac{1}{2} V_{Ed} (\cot\theta - \cot\alpha) = \frac{1}{2} 750 \cdot (2,46 - 1,0) = 547 \text{ kN}$$

che richiede 1400 mm^2 .**8.2.4.1 Sintesi dei risultati (Tema 2)****Prospetto A8.3** Sintesi dei risultati del Tema 2 (progetto).

α	f_{ck}	V_{Ed} (kN)	$\cot\theta$	A_{sw}/s	ΔF_{td} (kN)	Note
Esempio 8.2.1 ($\alpha = \pi/2$)	20	400	1,38	1,10	276,0	$b_w=220$ mm
Esempio 8.2.2 ($\alpha = \pi/2$)	40	500	2,50	0,76	625,0	bielle integre
Esempio 8.2.3 ($\alpha = \pi/2$)	60	750	2,50	1,14	937,5	bielle integre
Esempio 8.2.4 ($\alpha = \pi/4$)	40	750	2,46	1,16	547,0	

8.2.5 Esempio 8.2.5 – Determinazione del momento torcente resistente

Data la sezione rettangolare di cui alla figura 8.13, $b = 400$ mm, $h = 500$ mm, realizzata con C25/30, dotata di staffe di diametro 8 mm distanti 200 mm, e armatura longitudinale (diffusa sui lati) disponibile per la torsione $A_{s\ell} = 1800 \text{ mm}^2$ e successivamente $A_{s\ell} = 3000 \text{ mm}^2$, si determina il momento torcente resistente con entrambe le ipotesi.

Acciaio B450C per tutte le armature ($f_{yld} = f_{ywd}$).

Parametri geometrici e meccanici

$$A = 400 \cdot 500 = 200000 \text{ mm}^2$$

$$u = 2 \cdot (400 + 500) = 1800 \text{ mm}$$

$$t = \frac{A}{u} = \frac{200000}{1800} = 111 \text{ mm} : \text{si assume per semplicità } 110 \text{ mm}$$

$$u_k = 2 \cdot [(500 - 110) + (400 - 110)] = 1360 \text{ mm}$$

$$A_k = (500 - 110) \cdot (400 - 110) = 113100 \text{ mm}^2$$

$$\nu f_{cd} = 0,5 \cdot 14,16 = 7,08 \text{ N/mm}^2 ; f_{yd} = 391 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{ywd} = f_{y\ell d} = 391 \text{ N/mm}^2$$

$$A_{sw} = 50 \text{ mm}^2; s = 200 \text{ mm}$$

Determinazione di $\cot\theta$

$$\text{Se } A_{s\ell} = 1800 \text{ mm}^2$$

$$\cot^2 \theta = \frac{1800}{1360} \cdot \frac{200}{50} = 5,2941 \text{ da cui } \cot\theta = 2,30 \text{ e } \theta = 23,50^\circ$$

$$T_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} \cdot f_{yd} \cdot 2A_k \cdot \cot\theta = \frac{50}{200} \cdot 391 \cdot 2 \cdot 113100 \cdot 2,30 = 50,85 \text{ kNm}$$

$$T_{Rd,max} = 2 \cdot (\nu f_{cd}) \cdot t \cdot A_k \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta = 2 \cdot 7,08 \cdot 110 \cdot 113100 \cdot 0,3987 \cdot 0,9171 = 64,41 \text{ kNm}$$

Il momento torcente resistente è il minore dei due valori, ossia 50,85 kNm.

Se $A_{s\ell} = 3000 \text{ mm}^2$ (a parità degli altri parametri), risulta $\cot\theta = 2,97$. In tal caso assumendo $\cot\theta = 2,50$ si ottiene:

$$T_{Rd,s} = 55,27 \text{ kNm}$$

$$T_{Rd,max} = 60,74 \text{ kNm}$$

Il momento torcente resistente vale 55,27 kNm.

8.2.6 Esempio 8.2.6 – Progetto delle armature per torsione

Con riferimento alla sezione di cui all'esempio 8.2.1, con identici materiali, si progettano le armature necessarie per tre valori del momento torcente T_{Ed} .

a) $T_{Ed} = 75 \text{ kNm}$

Applicando la formula $\theta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{T_{Ed}}{(\nu f_{cd}) \cdot \alpha_{cw} \cdot t \cdot A_k}$ si deduce:

$$\theta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{75000000}{7,08 \cdot 1,0 \cdot 110 \cdot 113100} = 29,18^\circ$$

angolo di collasso delle bielle compresse. Da cui

$$\cot \theta = 1,79$$

Risultano quindi le armature:

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{T_{Ed}}{2 \cdot A_k \cdot f_{ywd} \cdot \cot \theta} = \frac{75000000}{2 \cdot 113100 \cdot 391 \cdot 1,79} = 0,47 \text{ mm}^2 / \text{mm} \quad (1\phi 10 / 165 \text{ mm})$$

$$A_{sl} = \frac{T_{Ed} \cdot u_k \cdot \cot \theta}{2 \cdot A_k \cdot f_{yld}} = \frac{75000000 \cdot 1360 \cdot 1,79}{2 \cdot 113100 \cdot 391} = 2064 \text{ mm}^2$$

b) $T_{Ed} = 100 \text{ kNm}$

In questo caso

$$\frac{T_{Ed}}{(v f_{cd}) \cdot t \cdot A_k} = \frac{100000000}{7,08 \cdot 1,0 \cdot 110 \cdot 113100} = 1,13 > 1$$

dunque la sezione di calcestruzzo è inadeguata. Non si può procedere ulteriormente.

c) $T_{Ed} = 40 \text{ kNm}$

Con il valore proposto, l'angolo θ risulta

$$\theta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{40000000}{7,08 \cdot 110 \cdot 113100} = 13,50^\circ \quad \left(\frac{T_{Ed}}{(v f_{cd}) \alpha_{cw} t A_k} = 0,45 < 0,69 \right)$$

Il collasso si verifica lato acciaio.

Si assume $\theta = 21,8^\circ$ e quindi $\cot \theta = 2,50$

Risulta:

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{T_{Ed}}{2 \cdot A_k \cdot f_{ywd} \cdot \cot \theta} = \frac{40000000}{2 \cdot 113100 \cdot 391 \cdot 2,50} = 0,18 \text{ mm}^2 / \text{mm} \quad (1\phi 8 / 250 \text{ mm})$$

$$A_{sl} = \frac{T_{Ed} \cdot u_k \cdot \cot \theta}{2 \cdot A_k \cdot f_{yld}} = \frac{40000000 \cdot 1360 \cdot 2,50}{2 \cdot 113100 \cdot 391} = 1537 \text{ mm}^2$$

In alternativa si può assumere, per esempio, $\theta = 30^\circ$ e quindi $\cot \theta = 1,7321$

Risulta:

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{T_{Ed}}{2 \cdot A_k \cdot f_{ywd} \cdot \cot \theta} = \frac{40000000}{2 \cdot 113100 \cdot 391 \cdot 1,7321} = 0,259 \text{ mm}^2 / \text{mm}$$

(1 ϕ 8/190 mm)

$$A_{sl} = \frac{T_{Ed} \cdot u_k \cdot \cot \theta}{2 \cdot A_k \cdot f_{yld}} = \frac{40000000 \cdot 1360 \cdot 1,7321}{2 \cdot 113100 \cdot 391} = 1064 \text{ mm}^2$$

ossia incremento di staffe e riduzione di armatura longitudinale.

8.2.7 Esempio 8.2.7 – Trave soggetta a taglio, torsione e flessione

Trave di luce 6 m incastrata alle estremità e sollecitata da un carico P in mezzzeria con tre diverse eccentricità (fig. 8.14).

Calcestruzzo: C60/75; $f_{cd} = 34 \text{ N/mm}^2$. Acciaio: B450 C.

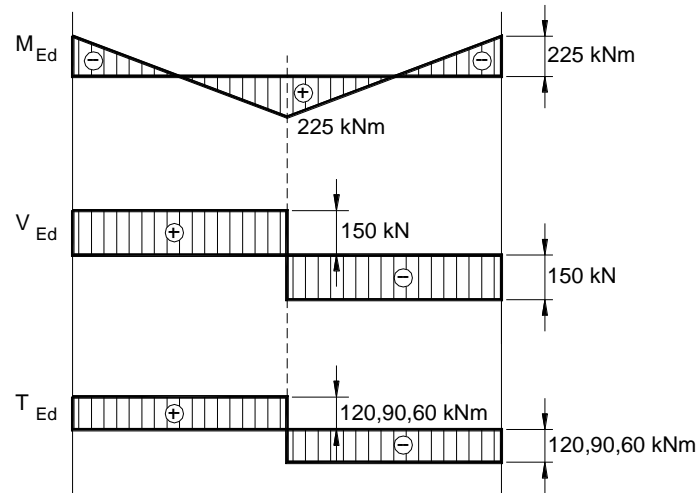


Figura A8.1 Diagrammi M_{Ed} , V_{Ed} , T_{Ed} .

Esame statico e progetto delle armature relativi al carico $P = 300$ kN allo stato limite ultimo, con eccentricità: 0,80 m, 0,60 m, 0,40 m. Si prescinde dal peso proprio della trave.

Esame statico e progetto delle armature

Flessione

Essendo la trave incastrata, i momenti in mezzeria e agli incastri hanno lo stesso valore assoluto (fig. A8.1)

$$M_{Ed} = \frac{P\ell}{8} = \frac{300 \cdot 6}{8} = 225 \text{ kNm}$$

Il momento ridotto risulta

$$\mu_{Ed} = \frac{M_{Ed}}{bd^2 f_{cd}} = \frac{225 \cdot 10^6}{300 \cdot 450^2 \cdot 34} = 0,1090$$

Dalla Tabella U2 si deduce, per la soluzione con sola armatura tesa, $\omega = 0,1175$, da cui

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \omega \frac{f_{cd}}{f_{yd}} = 0,1175 \cdot \frac{34}{391} = 0,0102$$

Prospetto A8.4 Valori delle sollecitazioni di taglio e torsione.

P (kN)	e (m)	V_{Ed} (kN)	T_{Ed} (kNm)
300	0,80	150	120
300	0,60	150	90
300	0,40	150	60

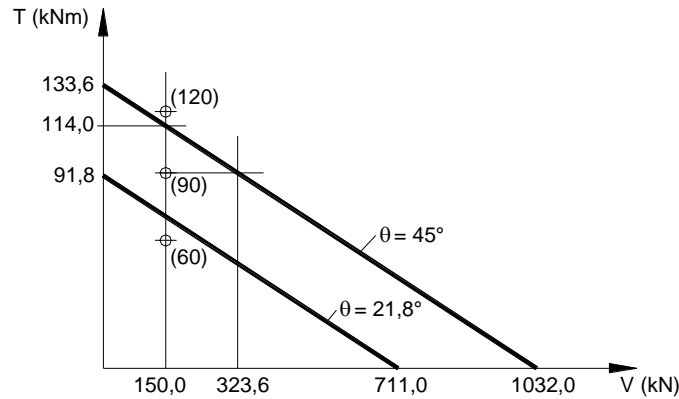


Figura A8.2 Diagrammi d'interazione $V_{Rd,max} - T_{Rd,max}$.

e quindi

$$A_s = 0,0102 \cdot 300 \cdot 450 = 1380 \text{ mm}^2$$

Taglio e torsione

Le sollecitazioni V e T presentano diagrammi uniformi e antisimmetrici rispetto alla mezzzeria della trave (fig. A8.1); i rispettivi valori sono riportati nel prospetto A8.4.

Per esaminare le condizioni di sollecitazione in rapporto alle capacità resistenti della trave si procede nel modo seguente.

Si tracciano (fig. A8.2) i due diagrammi d'interazione $V_{Rd,max} - T_{Rd,max}$ relativi alla resistenza della bielle di calcestruzzo aventi inclinazione rispettivamente $\theta = 45^\circ$ e $\theta = 21,8^\circ$ applicando la relazione:

$$T_{Ed} / T_{Rd,max} + V_{Ed} / V_{Rd,max} = 1 \quad [(6.29)]$$

Sulla stessa figura si riportano i punti rappresentativi delle coppie di valori $V_{Ed} - T_{Ed}$ sollecitanti di cui al prospetto A8.4. In base al confronto si procede al progetto delle armature.

$T_{Rd,max}$ e $V_{Rd,max}$ si calcolano con le formule

$$T_{Rd,max} = 2v f_{cd} A_k t_{ef} \sin \theta \cos \theta \quad [(6.30)]$$

$$V_{Rd,max} = b_w z v f_{cd} \sin \theta \cos \theta \quad [(6.9)]$$

Nella figura A8.3a è riportata la sezione tubolare resistente a torsione. I valori dei termini geometrici della [(6.30)] sono qui determinati:

$$A = 300 \cdot 500 = 15000 \text{ mm}^2$$

$$u = (300 + 500) \cdot 2 = 1600 \text{ mm}$$

$$t_{ef} = A / u = 94 \text{ mm}$$

$$u_k = 2 \cdot (500 - 94 + 300 - 94) = 1224 \text{ mm}$$

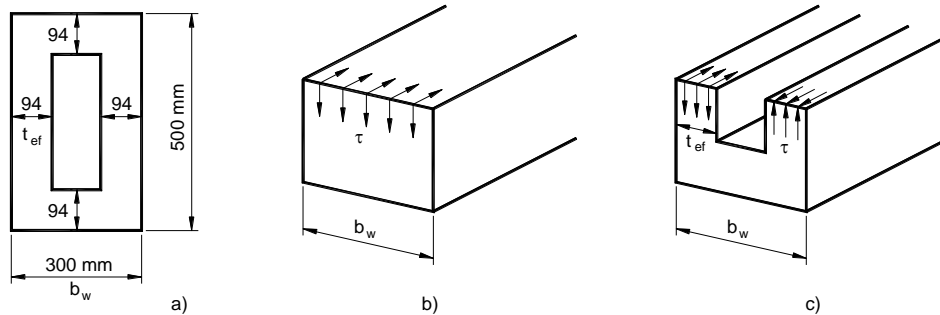


Figura A8.3 a) sezione resistente; b) tensioni τ di taglio; c) tensioni τ di torsione.

$$A_k = (500 - 94) \cdot (300 - 94) = 83636 \text{ mm}^2$$

$$d = 450 \text{ mm}$$

$$z = 0,9d = 405 \text{ mm}$$

I valori dei termini relativi alla [(6.9)] sono nei dati del problema.

Calcolo dei termini relativi alla [(6.30)] e alla [(6.9)]

Assumendo $\theta = 45^\circ$ si ottiene

$$T_{Rd,max} = 2 \cdot 0,50 \cdot 34 \cdot 83636 \cdot 94 \cdot 0,707 \cdot 0,707 = 133,6 \text{ kNm}$$

$$V_{Rd,max} = 300 \cdot 405 \cdot 0,50 \cdot 34 \cdot 0,707 \cdot 0,707 = 1032 \text{ kN}$$

Assumendo $\theta = 21,8^\circ$

$$T_{Rd,max} = 2 \cdot 0,50 \cdot 34 \cdot 83636 \cdot 94 \cdot 0,3714 \cdot 0,9285 = 91,8 \text{ kNm}$$

$$V_{Rd,max} = 300 \cdot 405 \cdot 0,50 \cdot 34 \cdot 0,3714 \cdot 0,9285 = 711 \text{ kN}$$

I diagrammi d'interazione sono due rette parallele (fig.A8.2). Riportando sulla stessa figura i punti di coordinate $V_{Ed} = 150 \text{ kN}$ e T_{Ed} di cui al prospetto A8.4, si rileva che:

- $T_{Ed} = 120 \text{ kNm}$ non è ammissibile, in quanto supera le capacità resistenti
- $T_{Ed} = 90 \text{ kNm}$ è nella fascia compresa fra le due rette, quindi è ammissibile. L'angolo θ corrispondente deve essere determinato
- $T_{Ed} = 60 \text{ kNm}$ si colloca al di sotto delle due rette: è ammissibile, e lo stato limite ultimo si configura con il collasso delle armature.

Determinazione dell'angolo θ di inclinazione delle bielle compresse

Come premessa si rammenta che il taglio determina sulla sezione rettangolare una distribuzione di tensioni tangenziali

$$\tau_v = \frac{V_{Ed}}{b_w \cdot z}$$

uniforme sulla larghezza b_w e sull'altezza z (fig. A8.3b); la torsione invece comporta su un tubo di flusso di larghezza t_{ef} e altezza z una distribuzione uniforme di tensioni τ_t con un segno, e sul tubo parallelo la stessa distribuzione di verso opposto (fig. A8.3c)

$$\tau_t = \frac{T_{Ed}}{2A_k \cdot t_{ef}}$$

Il tubo di flusso più sollecitato è quello in cui le tensioni di taglio e di torsione si sommano e danno luogo alla risultante:

$$V^* = (\tau_t + \tau_v) \cdot t_{ef} \cdot z \quad (8.6)$$

Sostituendo si ottiene

$$V^* = \frac{T_{Ed} \cdot z}{2A_k} + V_{Ed} \cdot \frac{t_{ef}}{b_w} \quad (8.7)$$

V^* è pertanto un termine noto.

Ricordando la relazione che lega le tensioni tangenziali τ , sia di taglio che di torsione, alle tensioni σ_c delle bielle compresse di inclinazione θ

$$\tau = \sigma_c \sin \theta \cdot \cos \theta$$

nel tubo di flusso dove queste si sommano si scrive

$$(\tau_t + \tau_v) = \sigma_c \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

e, allo stato limite ultimo

$$(\tau_t + \tau_v) = (v f_{cd}) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

Sostituendo nella (8.6) si ottiene

$$V^* = (v f_{cd}) \cdot z \cdot t_{ef} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{1}{2} (v f_{cd}) \cdot z \cdot t_{ef} \cdot \sin 2\theta$$

relazione che consente di determinare θ . Risulta quindi

$$\theta^* = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2V^*}{t_{ef} z v f_{cd}} \quad (8.8)$$

Nel secondo caso ($T_{Ed} = 90 \text{ kNm}$) applicando la (8.7) e la (8.8) risulta:

$$V^* = \frac{90 \cdot 10^6 \cdot 405}{2 \cdot 83636} + 150 \cdot 10^3 \cdot \frac{94}{300} = 218 + 47 = 265 \text{ kN}$$

$$\theta^* = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2 \cdot 265000}{94 \cdot 405 \cdot 0,5 \cdot 34} = 27,5^\circ$$

Nel terzo caso ($T_{Ed} = 60 \text{ kNm}$) risulta

$$V^* = \frac{60 \cdot 10^6 \cdot 405}{2 \cdot 83636} + 150 \cdot 10^3 \cdot \frac{94}{300} = 145 + 47 = 192 \text{ kN}$$

$$\theta^* = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2 \cdot 192000}{94 \cdot 405 \cdot 0,5 \cdot 34} = 18,20^\circ$$

Nel secondo caso l'angolo θ^* costituisce la soglia inferiore per le possibili soluzioni. Queste infatti sono limitate al campo $\theta^* - 45^\circ$ (e non $21,8^\circ - 45^\circ$). Se si adotta θ^* , si ottiene l'armatura minima. Se si adotta 45° con $V_{Rd} = 150$ kN si ottiene $T_{Rd} = 114$ kNm; con $T_{Rd} = 90$ kNm si ottiene $V_{Rd} = 323$ kN, in ogni caso resistenze maggiori di quella richiesta. Tali valori si ottengono graficamente intersecando la retta del diagramma superiore con due rette, una verticale, l'altra orizzontale, passanti per il punto di coordinate $V_{Ed} = 150$ kN, $T_{Ed} = 90$ kNm.

Nel terzo caso, essendo $\theta^* = 18,20^\circ < 21,80^\circ$ per la [(6.7N)] è necessario adottare almeno $21,80^\circ$.

Determinazione delle armature

Staffe

Come regola generale si determinano sommando quelle richieste dalla torsione e quelle richieste dal taglio calcolate con lo stesso angolo θ .

Supponendo di disporre staffe a 2 bracci, l'armatura richiesta dalla torsione (un braccio), si deduce dalla (8.3)

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{T_{Ed}}{2A_k f_{yd} \cot \theta}$$

e quella richiesta dal taglio si ottiene dalla [(6.8)]

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Ed}}{z \cdot f_{yd} \cot \theta}$$

Quest'ultima però è l'armatura totale richiesta dal taglio, ossia nel caso presente 2 bracci di staffa. Volendo sommare i due risultati, quello del taglio deve essere dimezzato. Pertanto risulta

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{T_{Ed}}{2A_k f_{yd} \cot \theta} + \frac{V_{Ed}}{2 \cdot z \cdot f_{yd} \cot \theta}$$

Nel secondo caso ($T_{Ed} = 90$ kNm), essendo $\theta^* = 27,5^\circ$ e $\cot \theta^* = 1,92$, risulta per un braccio di staffa:

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{90 \cdot 10^6}{2 \cdot 83636 \cdot 391 \cdot 1,92} + \frac{150000}{2 \cdot 405 \cdot 391 \cdot 1,92} = 0,7167 + 0,2461 = 0,9628 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

che sono soddisfatti, per esempio, con 1 ϕ 12/110 mm

Nel terzo caso ($T_{Ed} = 60$ kNm), essendo $\theta^* < 21,8^\circ$ per il rispetto della [(6.7N)], si assume $\cot \theta = 2,5$, corrispondente a $21,8^\circ$. Risulta per un braccio di staffa:

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{60 \cdot 10^6}{2 \cdot 83636 \cdot 391 \cdot 2,50} + \frac{150000}{2 \cdot 405 \cdot 391 \cdot 2,50} = 0,3670 + 0,1890 = 0,5560 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

che sono soddisfatti, per esempio, con 1 ϕ 10/140 mm.

Armature longitudinali

L'armatura richiesta dalla torsione è data da

$$A_{s\ell} = \frac{T_{Ed} u_k}{2 \cdot A_k \cdot f_{yd}} \cdot \cot \theta$$

e deve essere distribuita lungo il perimetro, internamente alle staffe.

L'armatura per il taglio è data da

$$A_{s\ell} = \frac{V_{Ed}}{2 \cdot f_{yd}} \cdot \cot \theta$$

e deve essere disposta all'intradosso.

Nel secondo caso ($T_{Ed} = 90$ kNm) risulta:

$$A_{s\ell} = \frac{90 \cdot 10^6 \cdot 1224}{2 \cdot 83636 \cdot 391} \cdot 1,92 + \frac{150000}{2 \cdot 391} \cdot 1,92 = (3234 + 368) \text{ mm}^2$$

Nel terzo caso risulta ($T_{Ed} = 60$ kNm):

$$A_{s\ell} = \frac{60 \cdot 10^6 \cdot 1224}{2 \cdot 83636 \cdot 391} \cdot 2,50 + \frac{150000}{2 \cdot 391} \cdot 2,50 = (2807 + 480) \text{ mm}^2$$

Nelle parentesi il primo valore è relativo alla torsione, il secondo al taglio.