

*Franco Angotti, Matteo Guiglia, Piero Marro, Maurizio Orlando*

**Progetto delle Strutture in Calcestruzzo Armato**

con l'Eurocodice 2 e le Norme Tecniche NTC 2018

*Esempi svolti relativi al capitolo 4*

**Analisi strutturale**

4.1 Esempio 4.1. Trave dotata di duttilità che consente l'applicazione dei metodi plastici.....	A4.3
4.2 Esempio 4.2. Applicazione dei metodi lineare (L), lineare con redistribuzione (LR), plastico (P) a una trave avente grande duttilità .....	A4.5
4.3 Esempio 4.3. Trave a tre campate – progetto con (LR) e verifica con (P) .....	A4.6
4.3.1 Elementi di base per la soluzione elastica allo stato limite ultimo.....	A4.7
4.3.2 Analisi plastica.....	A4.9
4.4 Esempio 4.4. Trave continua a due luci – calcolo del carico ultimo con (L), (LR), (P), (NL).....	A4.10
4.4.1 Caso a): Stato limite ultimo .....	A4.10
4.4.4 Verifiche agli stati limite di esercizio per il caso a).....	A4.16
4.5 Esempio 4.5. Trave continua con infinite campate di luce 10 m allo SLU-SLE.....	A4.21
4.5.1 Dati geometrici e meccanici .....	A4.21
4.5.2 Analisi lineare elastica della struttura .....	A4.22
4.5.3 Ridistribuzione dei momenti negativi e progetto delle armature (riferimento al punto [5.5.(4)] e al CAP.7) .....	A4.24
4.5.4 Verifiche a taglio e progetto delle armature (staffe verticali) (riferimento al cap. 8).....	A4.25
4.5.5 Connessione anima-piattabanda.....	A4.27
4.5.6 Calcolo della soletta .....	A4.29
4.5.7 Disposizione delle armature .....	A4.30
4.5.8 Verifiche in esercizio .....	A4.32



Lo sviluppo degli esempi comporta l'impiego dei metodi di calcolo agli stati limite ultimi e di esercizio riportati nei capitoli 7, 8 e 11.

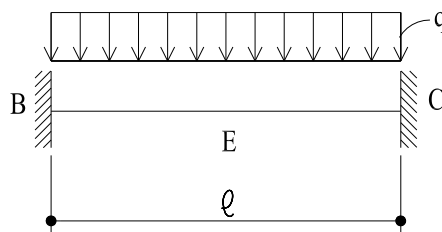
#### 4.1 Esempio 4.1. Trave dotata di duttilità che consente l'applicazione dei metodi plastici

a) Trave duttile con due incastri (B e C), fig. 4.5 dal capitolo 4 (che si riporta di seguito in stralcio per comodità).

Dati

$$\ell = 5,0 \text{ m}$$

$$M_B = -100 \text{ kNm}; M_C = -70 \text{ kNm}; M_E = +120 \text{ kNm}$$



**Figura 4.5** Geometria della trave (Figura conforme al capitolo 4).

##### Metodo cinematico

$$A = \frac{120 + 100}{-100 + 70} = -7,33$$

$$k = 7,33 - \sqrt{7,33^2 - 7,33} = 0,5183$$

$$q_u = \frac{2}{25} \cdot \frac{100 \cdot (1 - 0,5183) + 120 + 0,5183 \cdot 70}{0,5183 \cdot (1 - 0,5183)} = 65,51 \text{ kN/m}$$

$$x_E = 0,5183 \cdot 5,0 = 2,59 \text{ m}$$

##### Metodo statico

Eliminando gli incastri, la trave appoggiata ha momento in mezzzeria  $M_E$ . Il carico ultimo vale:

$$q_u = \frac{8M_E}{\ell^2} = 8 \cdot \frac{120}{25} = 38,4 \text{ kN/m}$$

##### Metodo misto

$$q_u = \frac{2}{25} \cdot (2 \cdot 120 + 100 + 70) + \frac{2}{25} \cdot \sqrt{(2 \cdot 120 + 100 + 70)^2 - (-70 + 100)^2} =$$

$$= 32,8 + 32,71 = 65,51 \text{ kN/m}$$

$$V_B = \sqrt{2 \cdot 65,51 \cdot (120 + 100)} = 169,77 \text{ kN}$$

$$x_E = \frac{169,77}{65,51} = 2,59 \text{ m}$$

b) Trave duttile con appoggio in B e incastro in C ( $M_B = 0$ )

**Metodo cinematico:**

$$A = \frac{120}{70} = +1,71$$

$$k = -1,71 + \sqrt{1,71^2 + 1,71} = 0,4428$$

$$q_u = \frac{2}{25} \cdot \frac{120 + 0,4428 \cdot 70}{0,4428 \cdot (1 - 0,4428)} = 48,95 \text{ kN/m}$$

$$x_E = 0,4428 \cdot 5,0 = 2,21 \text{ m}$$

**Metodo statico**

$$q_u = \frac{8M_E}{\ell^2} = 8 \cdot \frac{120}{25} = 38,4 \text{ kN/m}$$

**Metodo misto**

$$q_u = \frac{2}{25} \cdot (2 \cdot 120 + 70) + \frac{2}{25} \cdot \sqrt{4 \cdot 120 \cdot (120 + 70)} = 24,8 + 24,15 = 48,95 \text{ kN/m}$$

$$V_B = \sqrt{2 \cdot 48,95 \cdot 120} = 108,38 \text{ kN}$$

$$x_E = \frac{108,38}{48,95} = 2,21 \text{ m}$$

c) Trave duttile con incastro in B e appoggio in C ( $M_C = 0$ )

**Metodo cinematico:**

$$A = \frac{120 + 100}{100} = 2,20$$

$$k = 2,20 - \sqrt{2,20^2 - 2,20} = 0,5752$$

$$q_u = \frac{2}{25} \cdot \frac{100 \cdot (1 - 0,5752) + 120}{0,5752 \cdot (1 - 0,5752)} = 53,19 \text{ kN/m}$$

$$x_E = 0,5752 \cdot 5,0 = 2,87 \text{ m}$$

**Metodo statico: ved. il caso b)**

**Metodo misto**

$$q_u = \frac{2}{25} \cdot (2 \cdot 120 + 100) + \frac{2}{25} \cdot \sqrt{4 \cdot 120 \cdot (120 + 100)} = 27,20 + 25,99 = 53,19 \text{ kN/m}$$

$$V_B = \sqrt{2 \cdot 53,19 \cdot (120 + 100)} = 152,98 \text{ kN}$$

$$x_E = \frac{152,98}{53,19} = 2,87 \text{ m}$$

#### 4.2 Esempio 4.2. Applicazione dei metodi lineare (L), lineare con ridistribuzione (LR), plastico (P) a una trave avente grande duttilità

Sezione rettangolare  $b = 250 \text{ mm}$ ;  $d = 500 \text{ mm}$ ;  $h = 550 \text{ mm}$ . Luce  $7,50 \text{ m}$ . Doppio incastro.

Materiali: calcestruzzo C30/37 ( $f_{cd} = 17 \text{ N/mm}^2$ ); acciaio  $f_{yk} = 450 \text{ N/mm}^2$ .

Carico uniformemente distribuito  $q$

Sezioni di incastro e di campata identicamente armate:

$$A_s (\text{tesa}) = 1200 \text{ mm}^2; A'_s = 0,2 A_s.$$

a) In termini adimensionali (riferimento al cap. 7) le sezioni presentano:

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{b d f_{cd}} = \frac{1200 \cdot 391}{250 \cdot 500 \cdot 17} = 0,22$$

ed essendo

$$\omega' / \omega = 0,2,$$

la tabella U1 fornisce

$$\xi = 0,219 \text{ e } \mu = 0,20$$

I momenti resistenti risultano:

$$M_{Rd} = \mu b d^2 f_{cd} = \pm 0,20 \cdot 250 \cdot 500^2 \cdot 17 = \pm 212,5 \text{ kNm}$$

Il valore del carico ultimo secondo il metodo lineare elastico risulta:

$$q_u = 12 \cdot \frac{M_{Rd}}{\ell^2} = 12 \cdot \frac{212,5}{7,5^2} = 45,33 \text{ kN/m}$$

Applicando il metodo plastico cinematico con uguali valori del momento plastico in mezzzeria e agli incastri, essendo verificate tutte le clausole del punto [5.6.2(2)], risulta:

$$2M_{Rd}\theta + M_{Rd}2\theta = q\ell \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \theta, \text{ da cui}$$

$$q = 16 \cdot \frac{M_{Rd}}{\ell^2} = 60,44 \text{ kN/m}$$

Con le formule del metodo plastico misto, essendo

$$M_E = -M_B = -M_C = 212,5 \text{ kNm}, \text{ risulta}$$

$$q_u = 60,44 \text{ kN/m}$$

Applicando il metodo lineare con ridistribuzione, il valore  $\delta$  ammissibile è

$$\delta = 0,44 + 1,25 \cdot 0,219 = 0,714$$

Ma per ottenere uguali momenti agli incastri e in mezzzeria è necessario limitare la ridi-

stribuzione a  $\delta = 0,75$ . In tal caso i momenti valgono  $\frac{q\ell^2}{16}$ . Quindi tutto avviene come se inizialmente agli incastri vi fosse

$$M = -\frac{212,5}{0,75} = -283,33 \text{ kNm}$$

Il carico  $q$  risulta pertanto

$$q = 12 \cdot \frac{283,3}{7,5^2} = 60,44 \text{ kN/m}$$

b) Sezione di campata come in a); sezioni di incastro con armatura dimezzata.

Per queste:

$$A_s = 600 \text{ mm}^2, A'_s = 120 \text{ mm}^2, \omega = 0,11, \omega' / \omega = 0,2, \mu = 0,104 \text{ e quindi}$$

$$M_{Rd} = 110 \text{ kNm}$$

Anche in questo caso tutte le clausole del punto [5.6.2(2)] sono rispettate.

Il valore del carico ultimo secondo la teoria elastica lineare risulta

$$q = 12 \cdot \frac{110,0}{7,5^2} = 23,5 \text{ kN/m}$$

Il metodo cinematico porge invece:

$$2 \cdot 110 \cdot \theta + 212,5 \cdot 2\theta = q \frac{\ell^2}{4} \theta \text{ da cui}$$

$$q = 45,8 \text{ kN/m}$$

Applicando il metodo lineare con redistribuzione, il valore  $\delta$  ammissibile è  $\delta = 0,70$ .

Quindi tutto avviene come se inizialmente agli incastri vi fosse

$$M = - \frac{110,0}{0,70} = -157,14 \text{ kNm}$$

Il carico  $q$  risulta pertanto

$$q = 12 \cdot \frac{157,14}{7,5^2} = 33,5 \text{ kN/m}$$

Il prospetto A4.1 riporta la sintesi dei carichi ultimi ottenuti con i tre metodi di analisi adottati.

**Prospetto A4.1** Sintesi dei risultati. Valori di  $q_u$  (kN/m).

Trave	L	P	LR
a	45,33	60,44	60,44
b	23,50	45,80	33,50

### 4.3 Esempio 4.3. Trave a tre campate – progetto con (LR) e verifica con (P)

Trave a tre campate progettata allo stato limite ultimo con l'analisi elastica con redistribuzione e verificata con l'analisi plastica.

Si consideri la trave della fig. A4.1 a tre campate di luce m 11,50, costituita con calcestruzzo C30/37 e acciaio B450C, soggetta ai seguenti carichi:

- peso proprio strutturale:  $g_{k1} = 6,0 \text{ kN/m}$
- carico permanente portato:  $g_{k2} = 4,0 \text{ kN/m}$

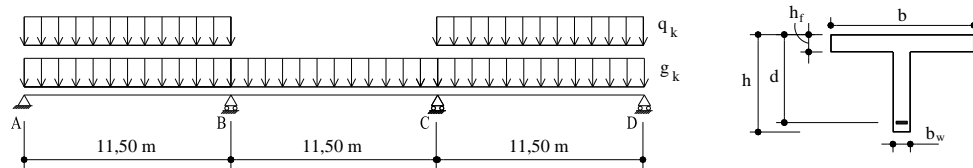
- carico variabile:  $q_k = 10,0$  kN/m disposto sulla prima e sulla terza campata.

Il carico di progetto a SLU vale:

$$q_{Ed} = 6,0 \cdot 1,30 + 4,0 \cdot 1,50 + 10,0 \cdot 1,50 = 7,8 + 6,0 + 15,0 = 28,8 \text{ kN/m}$$

La sezione della trave è a T con  $b = 1200$  mm,  $h = 550$  mm,  $d = 500$  mm,  $h_f = 100$  mm,  $b_w = 300$  mm.

Le armature sono determinate dapprima con l'analisi lineare; successivamente vengono effettuate ridistribuzioni dagli appoggi intermedi fino a  $\delta = 0,70$  con i relativi aumenti di armatura nelle campate.



**Figura A4.1** Geometria della trave e della sezione trasversale.

#### 4.3.1 Elementi di base per la soluzione elastica allo stato limite ultimo

Il carico permanente determina i momenti sugli appoggi intermedi:

$$M = -0,10 \cdot (6,0 \cdot 1,3 + 4,0 \cdot 1,5) \cdot 11,50^2 = -182,5 \text{ kNm}$$

Il carico variabile, che impegna le campate laterali, determina sugli stessi appoggi i momenti:

$$M = -0,05 \cdot (10,0 \cdot 1,50) \cdot 11,50^2 = -100,0 \text{ kNm}$$

##### **Momento totale**

$$M_{Ed} = -(182,5 + 100,0) = -282,5 \text{ kNm}$$

##### **Momenti nelle campate**

###### • Campate laterali

Il momento massimo si determina calcolando la reazione A sul primo appoggio, con l'equazione di equilibrio a rotazione intorno al punto B:

$$A\ell - q \frac{\ell^2}{2} = -282,5 \text{ kNm da cui}$$

$$A = \frac{-282,5 + \frac{28,8 \cdot 11,5^2}{2}}{11,5} = 141 \text{ kN.}$$

Nella campata il taglio si annulla per

$$x = 141/28,8 = 4,90 \text{ m, dove il momento è massimo.}$$

Il momento in tale sezione vale allora

$$M_{Ed} = 141 \times 4,90 - 28,8 \cdot \frac{4,90^2}{2} = 345,2 \text{ kNm}$$

- *Campata centrale*

Essendo il carico:  $q = 6,0 \cdot 1,30 + 4,0 \cdot 1,50 = 13,8 \text{ kN/m}$

il momento in mezzzeria vale:

$$13,8 \cdot \frac{11,5^2}{8} - 282,5 = -54,3 \text{ kNm}$$

Si effettuano ridistribuzioni  $\delta = 0,9$ ,  $\delta = 0,8$ ,  $\delta = 0,7$  e si calcolano i momenti ridistribuiti e i momenti nelle campate. L'incremento di momento positivo nelle campate laterali risulta pari a  $4,90/11,50 = 0,42$  volte la riduzione agli appoggi. I valori sono riportati nel prospetto A4.2.

**Prospetto A4.2** Ridistribuzioni di progetto sugli appoggi intermedi, momenti sugli appoggi e momenti ridistribuiti nelle campate.

$\delta$	$M_{\text{app}}$ (kNm)	$\Delta M$ (kNm)	$M_{\text{camp.lat.}}$ (kNm)	$M_{\text{camp.centr.}}$ (kNm)
1,00	- 282,5	0,0	345,2	- 54,3
0,90	- 254,2	28,3	357,0	- 26,0
0,80	- 226,0	56,5	370,0	+2,2
0,70	- 197,8	84,7	381,3	+30,4

Le armature per i momenti di continuità si progettano assumendo armature compresse pari a 0,2 quelle tese. Si adottano i parametri adimensionali

$$\mu = \frac{M_{Rd}}{bd^2 f_{cd}} ; \quad \omega = \frac{A_s f_{yd}}{bd f_{cd}}$$

$$\xi = \frac{x}{d}$$

e si fa ricorso alle tabelle corrispondenti per lo stato limite ultimo contenute in Appendice.

Punto di partenza: i momenti  $\mu$  corrispondenti ai momenti  $M_{\text{app}}$  di cui al prospetto A4.2. Per esempio, da

$$M_{\text{app}} = 282,5 \text{ kNm}$$

$$\mu = \frac{282,5 \cdot 10^6}{300 \cdot 500^2 \cdot 17} = 0,2216$$

**Prospetto A4.3** Momenti ridotti, rapporti meccanici di armatura tesa, posizioni relative dell'asse neutro e aree di armatura tesa e compressa.



$\delta$	$\mu$	$\omega$	$\xi$	$A_s$ (mm <sup>2</sup> )	$A'_s$ (mm <sup>2</sup> )
1,0	0,2216	0,246	0,246	1607	321
0,9	0,1994	0,220	0,219	1438	288
0,8	0,1773	0,194	0,197	1264	253
0,7	0,1559	0,168	0,175	1095	220

Le ridistribuzioni  $\delta$  proposte sono compatibili con i valori di  $\xi$  corrispondenti secondo la formula

$$\delta = 0,44 + 1,25 \cdot \xi, \text{ valida per calcestruzzi di classe fino a C50/60.}$$

Le armature compresse agli appoggi hanno valore nominale per il calcolo, ma dovranno essere almeno pari al 25% di quelle poste allo stesso livello nelle campate laterali (cfr. [9.2.1.4])

Le armature delle campate laterali soggette a momento positivo vengono dimensionate con la formula:

$$A_s = \frac{M}{z \cdot f_{yd}} \text{ nella quale}$$

$$z = \left(d - \frac{h_f}{2}\right) = \left(500 - \frac{100}{2}\right) = 450 \text{ mm}$$

Nella campata centrale, che è poco sollecitata, viene disposta un'armatura almeno pari a quella minima ai sensi della [9.1N]

$$A_s = 0,26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b_t \cdot d = 0,26 \cdot \frac{2,9}{450} \cdot 300 \times 500 = 252 \text{ mm}^2$$

I momenti  $\mu$  e le armature di progetto relative alle campate laterali sono riportati nel prospetto A4.4.

**Prospetto A4.4** Armature tese e compresse nelle campate laterali.

$\delta$	$\mu$	$\omega$	$A_s$	$A'_s$
1,00	0,2707	0,3071	2002	400
0,90	0,2800	0,3200	2087	417
0,80	0,2902	0,3331	2172	434
0,70	0,300	0,3463	2258	451

Nella campata centrale si dispongono le seguenti armature:  $A_s = 400 \text{ mm}^2$ ;  $A'_s = 400 \text{ mm}^2$ .

#### 4.3.2 Analisi plastica

Viene applicata alle soluzioni progettate con le ridistribuzioni.

Si applica il metodo misto con la formula che determina il carico ultimo in funzione dei momenti resistenti sull'appoggio di continuità ( $M_B$ ) e in campata ( $M_E$ ) (vedi 4.3.4) progettati col metodo LR:

$$q_u = \frac{2}{\ell^2} (2M_E - M_B) + \frac{2}{\ell^2} \sqrt{4M_E(M_E - M_B)}$$

Ad esempio, per  $\delta = 1,0$ :

$$q_u = \frac{2}{11,50^2} (2 \cdot 345,2 + 282,5) + \frac{2}{11,50^2} \sqrt{4 \cdot 345,2 \cdot (345,2 + 282,5)} = 14,71 + 14,08 = 28,79 \text{ kN/m}$$

I valori relativi alle quattro ipotesi di ridistribuzione  $\delta$  sono raccolti nel prospetto A4.5.

**Prospetto A4.5** Momento sull'appoggio e in campata; carico ultimo.

$\delta$	$M_B$ (kNm)	$M_E$ (kNm)	$q_u$ (kN/m)
1,00	- 282,5	345,2	28,79
0,90	- 254,2	357,0	28,77
0,80	- 226,0	370,0	28,81
0,70	- 197,8	381,3	28,73

I risultati sono coincidenti con i dati di progetto stante la grande duttilità delle sezioni.

#### 4.4 Esempio 4.4. Trave continua a due luci – calcolo del carico ultimo con (L), (LR), (P), (NL)

Trave continua a due luci di m 8, sezione rettangolare  $b = 250 \text{ mm}$ ;  $h = 550 \text{ mm}$ ;  $d = 500 \text{ mm}$ . Carico uniforme  $q$ . (fig. A4.2). Convenzionalmente si indica con B la sezione dell'appoggio di continuità e con E la sezione (o le sezioni) di campata.

Date le armature e i materiali, si determina il valore del carico ultimo  $q_u$  con i metodi di analisi:

- lineare elastica (L),
- lineare con ridistribuzione limitata (LR),
- plastica (P),
- non lineare (NL).

Si presentano due casi: a e b, caratterizzati da differenti calcestruzzi e armature.

##### 4.4.1 Caso a): stato limite ultimo

$$f_{ck} = 30 \text{ N/mm}^2; f_{cd} = 17 \text{ N/mm}^2; f_{yd} = 391 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Armature in B: } A_s = 6\phi 20 = 1884 \text{ mm}^2; A'_s = 2\phi 16 = 402 \text{ mm}^2$$

$$\text{Armature in E: } A_s = 7\phi 16 = 1407 \text{ mm}^2; A'_s = 2\phi 14 = 308 \text{ mm}^2$$

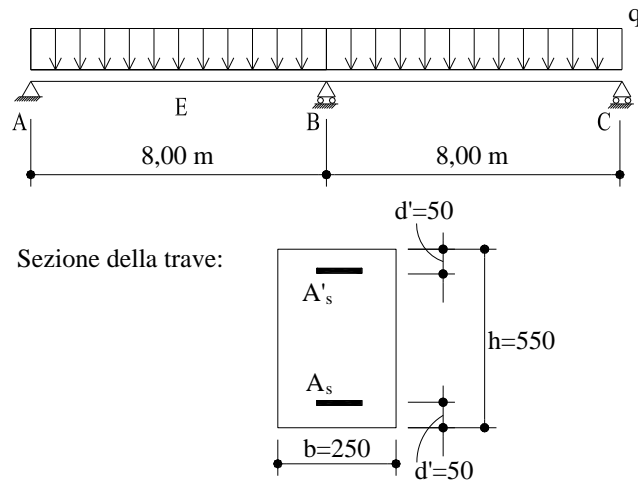
Rapporti meccanici di armatura:

$$\text{– in B: } \omega = \frac{1884 \cdot 391}{250 \cdot 500 \cdot 17} = 0,3467; \omega' = 0,0736; \frac{\omega'}{\omega} = 0,21$$

$$- \text{ in E: } \omega = \frac{1407 \cdot 391}{250 \cdot 500 \cdot 17} = 0,2589; \omega' = 0,0567; \frac{\omega'}{\omega} = 0,22$$

I valori di  $\xi$  e i momenti resistenti  $\mu$  si calcolano con l'ausilio della Tabella U1 in funzione di  $\omega$ . Risulta: in B  $\xi = 0,342$ ,  $\mu = 0,301$ ; in E  $\xi = 0,250$ ,  $\mu = 0,232$ . Quindi viene:

- in B:  $M_{Rd} = \mu b d^2 f_{cd} = -318 \text{ kNm}$ ;
- in E:  $244 \text{ kNm}$



**Figura A4.2** Geometria della trave e della sezione trasversale.

- *Analisi lineare elastica*

Il carico  $q_u$  è dato dal minore dei due valori corrispondenti ai momenti in campata e sull'appoggio intermedio:  $14,3 \cdot \frac{M_{Rd,E}}{\ell^2}$  e  $8 \cdot \frac{M_{Rd,B}}{\ell^2}$ .

Risulta, dal momento in B,  $q_u = 39,7 \text{ kN/m}$ .

- *Analisi plastica*

Applicando il metodo misto, con riserva di verifica della duttilità, risulta:

$$q = \frac{2}{64} (318 + 2 \cdot 244) + \frac{2}{64} \sqrt{4 \cdot 244(244 + 318)} = 48,3 \text{ kN/m}$$

*Verifica della duttilità.* Preliminarmente occorre che sia, per  $f_{ck} = 30$ ,

$$\xi = \frac{x}{d} \leq 0,45.$$

Nel caso in esame  $\xi = 0,342$  soddisfa alla condizione.

In secondo luogo, poiché  $\xi$  è maggiore di 0,25 è necessario verificare la capacità di rotazione dell'interno della sezione di appoggio secondo quanto indicato al punto [5.6.3]. La rotazione  $\theta_s = 1,2 \cdot \frac{\epsilon_{cu2}}{x} \cdot h = 1,2 \cdot \frac{0,0035}{171} \cdot 550 = 13,5 \text{ mrad}$  risulta minore di quella della

[fig.5.6N], che per  $x/d = 0,342$  indica come valore ammissibile 15,5 mrad. Pertanto la verifica è soddisfatta.

• *Analisi lineare con redistribuzione limitata*

Essendo noto  $x/d$  in B, si determina il valore di  $\delta$  ammissibile

Risulta

$$\delta = 0,44 + 1,25 \cdot 0,342 = 0,87$$

Il momento elastico in B prima della redistribuzione vale pertanto

$$M_{Rd} = \frac{318}{0,87} = 365,5 \text{ kNm e il carico corrispondente}$$

$$q = \frac{8 \cdot 365,5}{64} = 45,6 \text{ kN/m}$$

Il momento in E per effetto della redistribuzione viene incrementato della quantità

$$\Delta M = 0,4(365,5 - 318,0) = 19,0 \text{ kNm e vale pertanto}$$

$$M_E = \frac{1}{14} \cdot 45,6 \cdot 8^2 + 19,0 = 223 \text{ kNm} < 244 \text{ kNm, valore del momento resistente.}$$

• *Analisi non lineare*

L'analisi sviluppata adottando per il calcestruzzo la legge [(3.14)] (parabola di Sargin) fornisce i seguenti risultati:

- momento di snervamento di progetto all'appoggio:  $M_{yd,B} = 294,6 \text{ kNm}$
- momento di snervamento di progetto in campata:  $M_{yd,E} = 224,6 \text{ kNm}$

Le rotazioni plastiche ammissibili secondo la fig. [5.6N] in funzione di  $x/d$  allo stato limite ultimo sono:

- in campata, per  $x/d = 0,250$ :  $\theta_{pl} = 21,7 \text{ mrad}$
- all'appoggio, per  $x/d = 0,342$ :  $\theta_{pl} = 15,5 \text{ mrad}$

L'evoluzione al crescere del carico presenta la successione di eventi riportata nel prospetto A4.6.

**Prospetto A4.6** Caso a): successione degli eventi e rotazione plastica in funzione del carico applicato.

Carico $q$ (kN/m)	Evento	Rotazione plastica sull'appoggio (mrad)	Rotazione plastica in campata (mrad)
10,0	fessurazione in B	–	–
12,0	fessurazione in E	–	–
36,8	snerv.appoggio	0,0	0,0
45,2	snerv.campata	7,3	0,0
47,2	SLU appoggio	15,5	9,8

Dai tabulati (qui non riportati) si deduce che al carico  $q = 0,7 \cdot 47,2 = 33,0 \text{ kN/m}$ , che corrisponde alla combinazione di esercizio caratteristica (si confronti il capitolo 11), il mo-

mento in B vale 260 kNm a cui corrisponde  $\sigma_s = 324 \text{ N/mm}^2$ , valore inferiore a  $360 \text{ N/mm}^2 = 0,80 \cdot f_{yk}$ .

Il diagramma dell'evoluzione carico-momenti flettenti è riportato nella figura A4.3.

#### 4.4.2 Caso b): stato limite ultimo

$$f_{ck} = 60 \text{ N/mm}^2; f_{cd} = 34 \text{ N/mm}^2; f_{yd} = 391 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Armature in B: } A_s = 5\phi 26 = 2650 \text{ mm}^2; A'_s = 2\phi 20 = 628 \text{ mm}^2$$

$$\text{Armature in E: } A_s = 2\phi 20 + 3\phi 26 = 2218 \text{ mm}^2; A'_s = 3\phi 14 = 462 \text{ mm}^2$$

Rapporti geometrici di armatura:

- in B risulta  $\rho = 2,12/100$ ;  $\rho' = 0,50/100$
- in E risulta:  $\rho = 1,77/100$ ;  $\rho' = 0,37/100$

Rapporti meccanici di armatura:

- in B :  $\omega = \frac{2650 \cdot 391}{250 \cdot 500 \cdot 34} = 0,2438$ ;  $\omega' = 0,0578$ ;  $\frac{\omega'}{\omega} = 0,237$
- in E :  $\omega = \frac{2218 \cdot 391}{250 \cdot 500 \cdot 34} = 0,2041$ ;  $\omega' = 0,0425$ ;  $\frac{\omega'}{\omega} = 0,208$

I valori di  $\xi$  e i momenti resistenti  $\mu$  si calcolano con l'ausilio della Tabella U2 in funzione di  $\omega$ . Risulta:

- in B  $\xi = 0,280$ ,  $\mu = 0,219$
- in E  $\xi = 0,240$ ,  $\mu = 0,185$

da cui i momenti resistenti  $M_{Rd}$  rispettivamente

- in B:  $M_{Rd} = \mu b d^2 f_{cd} = 465,3 \text{ kNm}$
- in E:  $393,1 \text{ kNm}$

##### • Analisi lineare elastica

Il carico  $q_u$  è dato dal minore dei due valori:  $14,3 \cdot \frac{M_{Rd,E}}{\ell^2}$  e  $8 \cdot \frac{M_{Rd,B}}{\ell^2}$ .

Risulta, dal momento in B,  $q_u = 58,2 \text{ kN/m}$

##### • Analisi plastica

Applicando il metodo misto, con riserva di verifica della duttilità, risulta

$$q = \frac{2}{64} (465,3 + 2 \cdot 393,1) + \frac{2}{64} \sqrt{4 \cdot 393,1 (393,1 + 465,3)} = 75,4 \text{ kN/m}$$

Verifica della duttilità:

Preliminarmente occorre che sia, per  $f_{ck} = 60$ ,  $\xi = \frac{x}{d} \leq 0,35$ . Nel caso in esame  $\xi = 0,28$  soddisfa alla condizione.

In secondo luogo, poiché  $\xi$  è maggiore di 0,15 è necessario verificare la capacità di rotazione dell'intorno della sezione di appoggio secondo quanto indicato al punto [5.6.3]. La

rotazione  $\theta_s = 1,2 \cdot \frac{\varepsilon_{cu2}}{x} \cdot h = 1,2 \cdot \frac{0,0029}{140} \cdot 550 = 13,7$  mrad risulta minore di quella della [fig.5.6N], che per  $x/d = 0,28$  indica come valore ammissibile 16,0 mrad. Pertanto la verifica è soddisfatta.

- *Analisi lineare con redistribuzione limitata*

Essendo noto  $x/d$  in B, si determina il valore di  $\delta$  ammissibile

Risulta

$$\delta = 0,54 + 1,25 \cdot (0,6 + 0,0014 / 0,0029) \cdot 0,28 = 0,92$$

Il momento elastico in B prima della redistribuzione vale pertanto

$$M_{Rd} = \frac{465,3}{0,92} = 505,7 \text{ kNm e il carico corrispondente } q = \frac{8 \cdot 505,7}{64} = 63,22 \text{ kN/m}$$

Il momento in E per effetto della redistribuzione viene incrementato della quantità

$$\Delta M = 0,4(465,3 - 505,7) = 16 \text{ kNm e vale pertanto}$$

$$M_E = \frac{1}{14} \cdot 63,22 \cdot 8^2 + 16 = 299 \text{ kNm} < 393 \text{ kNm}, \text{ valore resistente.}$$

- *Analisi non lineare*

L'analisi sviluppata adottando per il calcestruzzo la legge [3.14] fornisce i seguenti risultati:

- momento di snervamento di progetto all'appoggio:  $M_{yd,B} = 421,4$  kNm
- momento di snervamento di progetto in campata:  $M_{yd,E} = 355,4$  kNm

Le rotazioni plastiche disponibili date dalla Fig. [5.6N] in funzione di  $x/d$  allo stato limite ultimo sono:

- in campata, per  $x/d = 0,241$ :  $\theta_{pl} = 22,4$  mrad
- all'appoggio, per  $x/d = 0,273$ :  $\theta_{pl} = 20,0$  mrad

L'evoluzione al crescere del carico presenta la successione di eventi riportata nel prospetto A4.7.

**Prospetto A4.7** Caso b): successione degli eventi e rotazione plastica in funzione del carico applicato.

Carico $q$ (kN/m)	Evento	Rotazione plastica all'appoggio (mrad)	Rotazione plastica in campata (mrad)
18,0	fessurazione in B	–	–
21,0	fessurazione in E	–	–
52,6	snerv.appoggio	0,0	0,0
69,3	snerv.campata	9,5	0,0
73,2	SLU appoggio	20,0	12,2

Dai tabulati dell'evoluzione risulta che al livello della combinazione caratteristica di esercizio ( $q = 0,7q_u = 0,7 \cdot 73,2 = 51,2$  kN/m) il momento in B vale 410,0 kNm a cui corrisponde, con  $\alpha_e = 9$  (vedi capitolo 11):

$$\sigma_c = 30,3 \text{ N/mm}^2 < 36 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_s = 359 \text{ N/mm}^2 < 360 \text{ N/mm}^2$$

e in campata  $M = 229,7$  kNm

$$\sigma_c = 18,4 \text{ N/mm}^2 < 36 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_s = 239 \text{ N/mm}^2 < 360 \text{ N/mm}^2$$

Il diagramma dell'evoluzione carico-momento flettente è riportato nella figura A4.4.

#### 4.4.3 Sintesi dei risultati a stato limite ultimo del caso a e del caso b

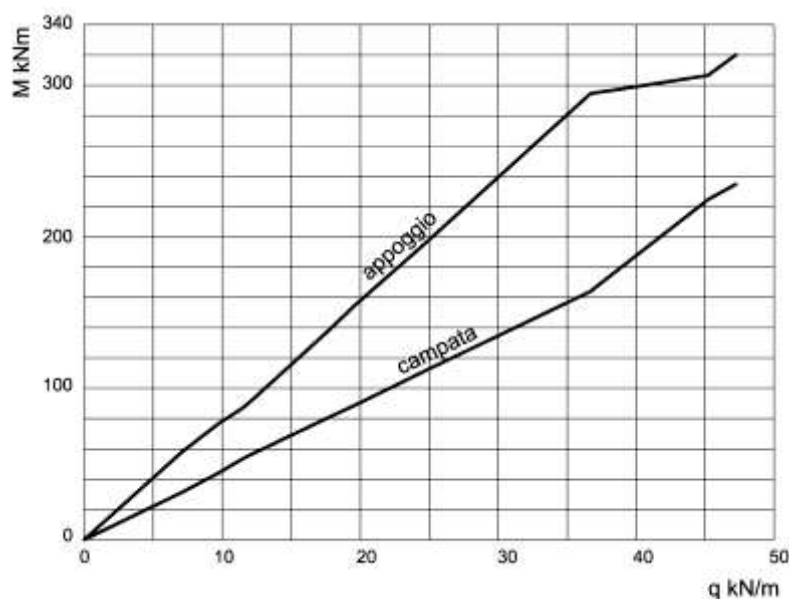
Nel prospetto A4.8 sono riportati i risultati ottenuti con i quattro metodi di analisi; i valori di  $q_u$  sono espressi in kN/m.

**Prospetto A4.8** Carico ultimo di calcolo ottenuto, per i casi svolti, con i 4 metodi di analisi.

$f_{ck}$	$L$	$LR$	$P$	$NL$
30	39,7	45,6	48,3	47,2
60	58,2	63,2	75,4	73,2

##### • Commento

Dall'esame del prospetto A4.8 si evince che con l'analisi lineare si ottiene il minimo valore di  $q_u$ . Questo è determinato dal raggiungimento dello stato limite ultimo nella sezione di appoggio quando la campata possiede ancora riserve di resistenza che il metodo non consente di mettere a profitto. Segue, nell'ordine di  $q_u$  crescente, l'analisi lineare con redistribuzione limitata: questa sfrutta, almeno parzialmente, la capacità di rotazione plastica della sezione di appoggio.



**Figura A4.3** Caso a): diagrammi carico-momento ottenuti con NL.**Figura A4.4** Caso b): diagrammi carico-momento ottenuti con NL.

Viene poi l'analisi non lineare che, prendendo in conto la deformabilità di tutti gli elementi con le rispettive leggi di deformazione, descrive l'evoluzione del comportamento al crescere del carico segnalando tutti gli eventi significativi: fessurazione, snervamento, rotazioni delle sezioni critiche, raggiungimento dello stato limite ultimo. Nei due esempi proposti la fine dell'evoluzione si verifica per raggiungimento della rotazione plastica limite sugli appoggi, mentre nelle campate la rotazione plastica è sviluppata solo parzialmente. Questa osservazione giustifica il minor valore di  $q_u$  raggiunto rispetto al metodo plastico il quale assume che le rotazioni plastiche possano svilupparsi completamente.

Complessivamente si può affermare che, in entrambi i casi esaminati, i tre metodi che mettono in gioco le risorse plastiche danno risultati poco diversi fra loro, e che le differenze sono chiaramente individuabili e riferibili alle ipotesi di base dei tre procedimenti di calcolo.

#### 4.4.4 Verifiche agli stati limite di esercizio per il caso a)

I procedimenti di verifica agli SLE sono contenuti nel cap.11.  
Calcestruzzo



$$f_{ck} = 30 \text{ N/mm}^2$$

Si assume la portanza a stato limite ultimo determinata con l'analisi plastica

$$q_u = 48,3 \text{ kN/m.}$$

Per la combinazione di esercizio caratteristica si assume

$$q = 0,7 q_u = 33,8 \text{ kN/m}$$

Per la combinazione quasi permanente si assume

$$q = 0,5 q_u = 24,2 \text{ kN/m}$$

L'assunzione di 0,7 per la combinazione caratteristica è statisticamente comprovata. Per la combinazione quasi permanente il rapporto è suscettibile di variazione da 0,45 a 0,55 (CEB 127-1995, pag. 33-34).

Poiché le sollecitazioni massime si verificano all'appoggio intermedio B, si calcolano i momenti relativi a tale sezione (si riportano anche i valori adimensionali poiché questi saranno impiegati nelle verifiche):

– combinazione caratteristica:

$$M_B = -\frac{1}{8} \cdot q \ell^2 = -\frac{1}{8} \cdot 33,8 \cdot 64 = -270,4 \text{ kNm} ; \mu_B = \frac{M_B}{bd^2 f_{cd}} = 0,2545$$

– combinazione quasi permanente:

$$M_B = -193,6 \text{ kNm} ; \mu_B = 0,1822$$

#### • Verifiche tensionali

Per le verifiche tensionali si fa ricorso alla Tabella E3 con  $\alpha_e=15$  che riporta i valori adimensionali  $\frac{\xi}{i}$  e  $\frac{1-\xi}{i}$  per la sezione con  $\frac{\rho'}{\rho} = 0,2$  essendo  $\rho = \omega \cdot \frac{f_{cd}}{f_{yd}} = 0,0151$ .

$$\text{Essi sono: } \frac{\xi}{i} = 4,42 ; \frac{1-\xi}{i} = 5,20$$

Applicando le formule adimensionali sviluppate nel punto 11.2.1.2 risulta:

– Combinazione caratteristica (  $f_{cd} = f_{ck} \cdot \frac{0,85}{1,5}$  )

$$\frac{\sigma_c}{f_{ck}} = 0,2545 \cdot 4,42 \cdot \frac{0,85}{1,5} = 0,64 > 0,60$$

$$\frac{\sigma_s}{f_{yk}} = 0,2545 \cdot 15 \cdot 5,20 \cdot \frac{17}{450} = 0,75 < 0,80$$

– Combinazione quasi permanente

$$\frac{\sigma_c}{f_{ck}} = 0,1822 \cdot 4,42 \cdot \frac{0,85}{1,5} = 0,45$$

$$\frac{\sigma_s}{f_{yk}} = 0,1822 \cdot 15 \cdot 5,20 \cdot \frac{17}{450} = 0,537; \sigma_s = 241 \text{ N/mm}^2$$

La tensione del calcestruzzo nella combinazione caratteristica non è ammissibile in ambiente aggressivo (classi di esposizione XD, XF, XS della [Tavola 4.1]); potrebbe essere tol-

lerata in ambiente normale. Se si vuole rispettare il limite 0,60 come richiedono in ogni caso le NTC, occorre ridurre il carico di esercizio come segue:

- nella combinazione caratteristica  $q_{es} = 33,8 \cdot \frac{0,60}{0,64} = 31,6 \text{ kN/m}$  ;
- nella combinazione quasi permanente:  $31,6 \cdot \frac{0,5}{0,7} = 22,5 \text{ kN/m}$

I momenti valgono:

- nella combinazione caratteristica:  
 $M_B = 252,8 \text{ kNm}$ ;  $\mu_B = 0,238$  ;
- nella combinazione quasi permanente:  
 $M_B = 180,0 \text{ kNm}$ ;  $\mu_B = 0,170$  ;

Le tensioni allora risultano:

- Combinazione caratteristica

$$\frac{\sigma_c}{f_{ck}} = 0,238 \cdot 4,42 \cdot \frac{0,85}{1,5} = 0,596 < 0,60$$

$$\frac{\sigma_s}{f_{yk}} = 0,238 \cdot 15 \cdot 5,20 \cdot \frac{17}{450} = 0,70 < 0,80$$

- Combinazione quasi permanente

$$\frac{\sigma_c}{f_{ck}} = 0,170 \cdot 4,42 \cdot \frac{0,85}{1,5} = 0,43$$

$$\frac{\sigma_s}{f_{yk}} = 0,170 \cdot 15 \cdot 5,20 \cdot \frac{17}{450} = 0,50; \quad \sigma_s = 225 \text{ N/mm}^2$$

- *Verifica della fessurazione nella combinazione di esercizio quasi permanente*

*Elementi preliminari* (si confronti il paragrafo 11.3 del Capitolo 11). L'armatura della sezione B è costituita da 6 barre tese di diametro 20 mm. Con la

$$[7.10] \text{ si calcola: } \rho_{\text{eff}} = \frac{6 \cdot 314}{250 \cdot 125} = 0,06$$

Seguono gli altri termini del calcolo

$$f_{ct, \text{eff}} = 2,9 \text{ N/mm}^2$$

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cm}} = \frac{200000}{33000} = 6$$

$$k_t = 0,4$$

$$c = 30 \text{ mm}$$

Applicando la [7.9] risulta:

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} =$$

$$= \frac{225 - 0,4 \cdot \frac{2,9}{0,06} (1 + 6 \cdot 0,06)}{200000} = \frac{225 - 26}{200000} = 1,0 \cdot 10^{-3} > 0,6 \cdot \frac{225}{200000} = 0,67 \cdot 10^{-3}$$

e con la [7.11]

$$s_{r,\max} = 3,4 \cdot 30 + 0,8 \cdot 0,5 \cdot 0,425 \cdot 20 / 0,0754 = 147 \text{ mm}$$

Infine, con la [7.8] :

$$w_k = 147 \cdot 1,0 \cdot 10^{-3} = 0,147 \text{ mm}$$

Il valore ottenuto è ammissibile in qualunque condizione ambientale ai sensi del Tabella [7.1N].

• *Verifica dell'inflessione nella combinazione quasi permanente*

Si procede dapprima seguendo il punto [7.4.2(2)]. La trave si configura come trave terminale di una trave continua per la quale il coefficiente  $k$  della Tavola [7.4N] vale 1,3. Con riferimento alle sezioni in campata, queste presentano i seguenti rapporti geometrici di armatura:  $\rho = 0,0112$  e  $\rho' = 0,0025$ .

Il rapporto geometrico di riferimento vale:  $\rho_0 = 10^{-3} \sqrt{30} = 0,00547$ . Poiché  $\rho > \rho_0$ , si applica la [7.16.b] ricavando il rapporto  $\frac{\ell}{d}$  ammissibile:

$$\frac{\ell}{d} = 1,3 \cdot \left[ 11 + 1,5 \sqrt{30} \cdot \frac{0,00547}{0,0112 - 0,0025} + \frac{1}{12} \sqrt{30} \cdot \sqrt{\frac{0,0025}{0,00547}} \right] \cdot \frac{500}{450} = 23,75$$

Il rapporto della trave in esame vale:  $\frac{\ell}{d} = \frac{8000}{500} = 16 < 23,75$

Questo risultato, ai sensi del punto [7.4.2(2)] consente di affermare che l'inflessione della trave rispetta i limiti indicati in [7.4.1(4) e (5)]. Tuttavia si riporta anche il calcolo dell'inflessione sviluppato secondo il metodo del punto [7.4.3].

Lo spostamento verticale massimo della trave con incastro e appoggio nel caso di EI costante è dato dall'espressione  $f = 0,0054 q \ell^4 / EI$ .

Nel caso presente il termine  $0,0054 q \ell^4$  vale:  $0,0054 \cdot 22,5 \cdot 8,0^4 = 497 \text{ kNm}^3$

La [7.18] esprime l'inflessione nella forma  $\alpha = \zeta \alpha_{II} + (1 - \zeta) \alpha_I$

dove  $\alpha_I$  e  $\alpha_{II}$  sono rispettivamente le inflessioni calcolate con sezione interamente reagente e sezione parzializzata e  $\zeta$ , coefficiente che tiene conto dell'effetto irrigidente offerto dal

calcestruzzo compreso fra le fessure, vale  $\zeta = 1 - \beta \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^2$  essendo  $M_{cr}$  il momento di fessurazione,  $M$  il momento di esercizio e  $\beta$  un coefficiente che vale 1 nel caso di carico di breve durata e 0,5 nel caso di applicazione prolungata o ripetuta. Qui si adotta 0,5.

Nel caso in studio  $M_{cr} = W \cdot f_{cm} = 250 \cdot \frac{550^2}{6} \cdot 2,9 = 36,5 \text{ kNm}$ ;

Ricordando che  $q = 24,2 \text{ kN/m}$ , il momento di esercizio nella combinazione quasi permanente risulta:

$$M = 24,2 \cdot \frac{8^2}{14,3} = 108,3 \text{ kNm}.$$

Risulta pertanto

$$\zeta = 1 - 0,5 \cdot \left( \frac{36,5}{108,3} \right)^2 = 0,94$$

Per la sezione interamente reagente, trascurando la presenza delle armature:

$$EI = 33000 \cdot \frac{250 \cdot 550^3}{12} = 114 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

Per la sezione parzializzata, dalla Tabella E3 si ricava per  $\rho = 0,0112$ ,  $\rho'/\rho = 0,2$  e  $\alpha_e=15$ :  $i = 0,0836$ .

Viene pertanto

$$I = 0,0836 \cdot 250 \cdot 500^3 = 2612 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \text{ e}$$

$$EI = 86,2 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

Risulta allora

$$\alpha_I = \frac{497 \cdot 10^{12}}{114 \cdot 10^{12}} = 4,36 \text{ mm}$$

$$\alpha_{II} = \frac{497 \cdot 10^{12}}{86,2 \cdot 10^{12}} = 5,76 \text{ mm}$$

L'inflessione vale pertanto

$$\alpha = 0,94 \cdot 5,76 + (1 - 0,94) \cdot 4,36 = 5,41 + 0,26 = 5,67 \text{ mm}$$

Se si vuole tenere conto dell'effetto della viscosità del calcestruzzo, è necessario correggere il risultato ottenuto seguendo il punto [7.4.3(5)]. Precisamente, è sufficiente sostituire il modulo di elasticità  $E_{cm}$  col modulo di elasticità dato dalla [7.20]:

$$E_{c,\text{eff}} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi(\infty, t_0)}$$

Ipotizzando un ambiente con umidità relativa 80%,  $t_0$ , tempo in giorni della messa in carico = 30 ; essendo il valore di  $h_0 = 2A/u = 2 \cdot \frac{550 \cdot 250}{250 + 2 \cdot 550} = 275 \text{ mm}$  (considerando che le facce verticali e quella superiore della trave sono esposte all'aria), dai grafici della fig.[3.1-b] si deduce  $\varphi(\infty, 30) = 2,0$ .

$$\text{Pertanto per la [7.20] risulta } E_{c,\text{eff}} = \frac{33000}{3} = 11000 \text{ N/mm}^2$$

Correggendo il risultato ottenuto col calcolo precedente, risulta

$$\alpha \cdot \frac{E_{cm}}{E_{c,\text{eff}}} = 5,67 \cdot \frac{33000}{11000} = 17,0 \text{ mm} . \text{ Tale valore è pari a } \frac{\ell}{471} < \frac{\ell}{250} .$$

#### 4.5 Esempio 4.5. Trave continua con infinite campate di luce 10 m allo SLU-SLE

Progetto allo stato limite ultimo e verifiche agli stati limite di esercizio.

##### 4.5.1 Dati geometrici e meccanici

La sezione trasversale, rappresentata nella figura A4.5, è costituita da travi di altezza 0,75 m poste all'interasse di 4,00 m collegate da una soletta superiore di spessore 0,15 m.

- Larghezza delle travi:  $b_w = 0,25$  m
- Altezza utile delle travi  $d = 0,70$  m

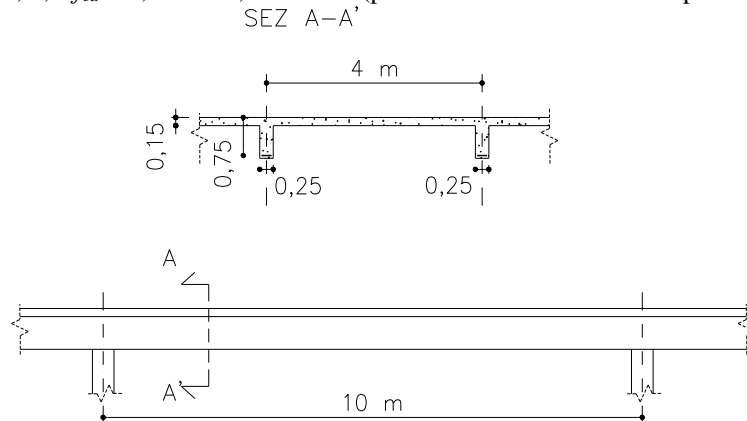
Materiali: calcestruzzo: C 30/37; acciaio: B450C

Resistenze di progetto:

$$f_{cd} = 17 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{yd} = 450/1,15 = 391 \text{ N/mm}^2$$

$$v = 0,5 ; v f_{cd} = 0,5 \cdot 17 = 8,50 \text{ N/mm}^2 \text{ (per i valori di } v \text{ si rinvia al capitolo 8)}$$



**Figura A4.5** Geometria della struttura.

Analisi dei carichi

- Peso proprio della struttura relativo a un interasse (4,0 m):  
 $(0,15 \cdot 4,0 + 0,25 \cdot 0,60) \cdot 25 = 18,75 \text{ kN/m}$
- Peso della sovrastruttura  
 $1,25 \text{ kN/m} \times 4,0 = 5,00 \text{ kN/m}$
- Carico permanente  
 $g_k = 18,75 + 5,00 = 23,75 \text{ kN/m}$
- Carico variabile  
 $q_k = 20,00 \text{ kN/m}$

Coefficienti parziali per le sollecitazioni allo stato limite ultimo (EN 1990)

$$\gamma_{G1} = 1,30 ; \gamma_{G2} = 1,50 ; \gamma_Q = 1,50$$

Carico permanente allo SLU:

$$g_{k1} \cdot \gamma_{G1} + g_{k2} \cdot \gamma_{G2} = 18,75 \cdot 1,30 + 5,00 \cdot 1,50 = 24,38 + 7,50 = 31,88 \text{ kN/m}$$

Carico variabile allo SLU:

$$q_k \cdot \gamma_Q = 20,0 \cdot 1,50 = 30 \text{ kN/m}$$

Il carico variabile può impegnare campate singole o una successione di campate. Nella figura A4.6 sono riportate tre condizioni di carico prese in considerazione.

#### 4.5.2 Analisi lineare elastica della struttura

- a) *Coefficienti di  $q\ell^2$  per il calcolo dei momenti flettenti.* I coefficienti sono riportati nel prospetto A4.9. I valori del momento flettente sono riportati nel prospetto A4.10.
- b) *Massime sollecitazioni flessionali.* Il massimo momento negativo si ottiene combinando il carico permanente con il carico variabile nella condizione 3 :  $M_C = -(267 + 342) = -609 \text{ kNm}$  ; il momento positivo per la stessa combinazione risulta :  $M_m = (133 + 171) = +304 \text{ kNm}$ . Il massimo momento positivo si ottiene combinando il carico permanente con il carico variabile nella condizione 2 :  $M_m = (133 + 250) = +383 \text{ kNm}$ .

**Prospetto A4.9** Coefficienti per il calcolo dei momenti flettenti.

Carico	Condizione	M <sub>B</sub>	M <sub>C</sub>	M <sub>m</sub>	M <sub>D</sub>	M <sub>E</sub>
Permanente	unica	- 1/12	- 1/12	+1/24	- 1/12	- 1/12
Variabile	1	- 1/12	- 1/12	+1/24	- 1/12	- 1/12
Variabile	2	- 1/24	- 1/24	+1/12	-1/24	- 1/24
Variabile	3	- 0,022	- 0,114	+0,057	- 0,022	- 0,022

**Prospetto A4.10** Momenti flettenti allo SLU.

Carico	Condizione	M <sub>B</sub> kNm	M <sub>C</sub> kNm	M <sub>m</sub> kNm	M <sub>D</sub> kNm	M <sub>E</sub> kNm
Permanente	unica	- 267	- 267	+133	- 267	- 267
Variabile	1	- 250	- 250	+125	- 250	- 250
Variabile	2	- 125	- 125	+250	- 125	- 125
Variabile	3	- 66	- 342	+171	- 66	- 66

- c) *Progetto delle armature con il metodo lineare elastico.* Il momento - 609 kNm potrebbe essere affrontato con sole armature tese; infatti, con il metodo di verifica riportato nel paragrafo 7.6.1.1.1 l'asse neutro risulta alla profondità:

$$x = \frac{d}{2\beta_2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2\beta_2}\right)^2 - \frac{M_{Ed}}{\beta_1\beta_2f_{cd}b}} = \frac{700}{2 \cdot 0,416} - \sqrt{\left(\frac{700}{2 \cdot 0,416}\right)^2 - \frac{609000000}{0,8095 \cdot 0,416 \cdot 17 \cdot 250}} =$$

$$= 305 \text{ mm}$$

a cui corrisponde  $x/d = 0,436$ . Tuttavia, poiché il punto [9.2.1.5 (1)] richiede che sugli appoggi di continuità siano presenti armature al lembo compresso di sezione pari ad almeno il 25% di quella presente in campata, conviene disporre una certa quantità di armatura compressa, mettendola a profitto come segue.

Il momento  $-609$  kNm viene sopportato con due coppie interne:

- la prima costituita da armature tese e compresse di uguale sezione  $A'_s = 500 \text{ mm}^2$ , braccio di leva  $(700 - 50) = 650 \text{ mm}$ , che realizza  $M' = 500 \cdot 391 \cdot 650 = 127 \text{ kNm}$ ;
- la seconda, pari a  $M = 609 - 127 = 482 \text{ kNm}$ , con calcestruzzo compresso e armature tese.

Adottando il procedimento sopra richiamato, con  $M = 482 \text{ kNm}$ , risulta  $x = 232 \text{ mm}$ .

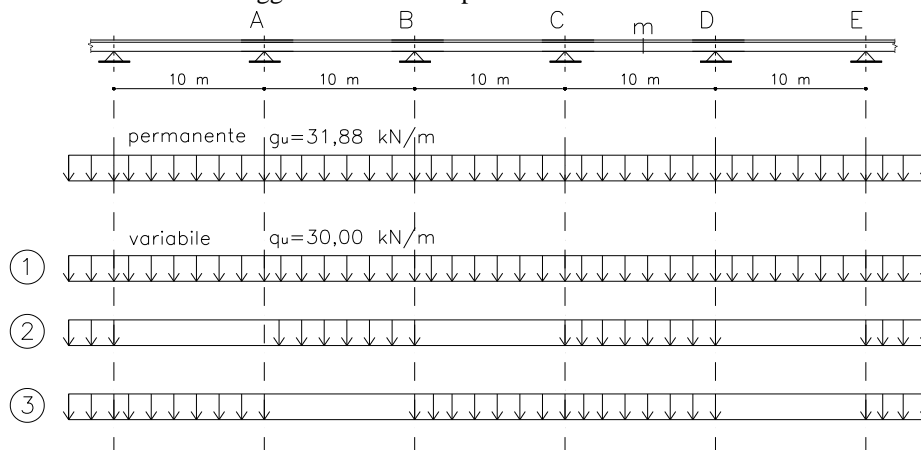
La risultante delle compressioni vale:

$$F_c = x \cdot b \cdot \beta_1 \cdot f_{cd} = 232 \cdot 250 \cdot 0,8095 \cdot 17 = 798 \text{ kN}$$

ed essendo per la flessione semplice  $F_c = F_t$ , l'armatura necessaria  $A_s$  vale  $F_t / f_{yd} = 798000 / 391 = 2041 \text{ mm}^2$ .

In definitiva il progetto allo stato limite ultimo richiede che la sezione sia armata superiormente con  $500 + 2041 = 2541 \text{ mm}^2$  e inferiormente con  $500 \text{ mm}^2$ .

Sezione di mezzzeria soggetta al momento positivo  $M = 383 \text{ kNm}$



**Figura A4.6** Condizioni di carico per lo stato limite ultimo.

Essendo la sezione a T con piattabanda compressa, il braccio di leva della coppia interna è dato da  $d - h_f/2 = 700 - 150/2 = 625 \text{ mm}$ . La forza di trazione vale pertanto:  $383 / 0,625 = 613 \text{ kN}$ , che richiede l'armatura  $A_s = 613000 / 391 = 1568 \text{ mm}^2$  soddisfatta con  $5\phi 20 \text{ mm}$ .

Agli appoggi occorre disporre almeno il 25% di tale area, ossia  $0,25 \cdot 1568 = 392 \text{ mm}^2$ .

### 4.5.3 Ridistribuzione dei momenti negativi e progetto delle armature (riferimento al punto [5.5.(4)] e al CAP.7)

- a) Si introduce una ridistribuzione del 20% ( $\delta = 0,80$ ) al momento negativo in C, con riserva di verificarne l'ammissibilità in relazione al valore di  $(x/d)$  e ai valori delle tensioni in esercizio.

Momento ridistribuito:  $-0,80 \cdot 609 = -487$  kNm. La differenza  $609 - 487 = 122$  kNm va ad incrementare il momento flettente positivo nelle campate adiacenti all'appoggio C. Si segnala che, nella condizione 3, i momenti sugli appoggi adiacenti B e D valgono  $-(265+66) = -331$  kNm; quindi non sono soggetti a ridistribuzione simultanea a C. Pertanto, per semplicità e a favore di sicurezza, si attribuisce alle mezzerie la metà di 122, ossia 61 kNm. Le sezioni risultano allora sollecitate da  $M_m = 304 + 61 = 365$  kNm. Tale valore è inferiore al massimo valore elastico calcolato (+383 kNm). Il momento  $-487$  kNm viene sopportato da due coppie interne:

- la prima costituita da armature tese e compresse di uguale sezione  $A'_s = 400$  mm<sup>2</sup>, braccio di leva  $(700 - 50) = 650$  mm che realizza  $M' = 400 \cdot 391 \cdot 650 = 101$  kNm;
- la seconda, pari a  $M = 487 - 101 = 386$  kNm, con calcestruzzo compresso e armature tese. Con le formule precedenti risulta:  $x = 179$  mm;  $F_c = 615,4$  kN e  $A_s = 1574$  mm<sup>2</sup>. In definitiva l'armatura richiesta al lembo superiore è  $(400 + 1574) = 1974$  mm<sup>2</sup>, a quello inferiore  $400$  mm<sup>2</sup>. All'asse neutro  $(x/d) = 179/700 = 0,255$  corrisponde per la [5.10a]:  $\delta = k_1 + k_2(x/d) = 0,44 + 1,25 \cdot (0,6 + 0,0014/0,0035) \cdot 0,255 = 0,76$  (ridistribuzione ammissibile 24%). La ridistribuzione proposta (20%) è quindi compatibile.

- b) Si propone una ridistribuzione più spinta, pari al massimo consentito ( $\delta = 0,70$ ). Il momento negativo viene ridotto a  $-0,70 \cdot 609 = -426$  kNm. La differenza  $609 - 426 = 183$  kNm incrementa il positivo nelle campate adiacenti all'appoggio C. Come fatto in precedenza si ottiene  $M = 304 + 183/2 = 395$  kNm. Tale valore è di poco superiore al massimo calcolato (+383), per cui sarà sufficiente un leggero ritocco dell'armatura. Ad esempio  $1\phi 22 + 4\phi 20$  anziché  $5\phi 20$ . Il momento  $-426$  kNm viene sopportato da due coppie interne:

- la prima costituita da armature tese e compresse di uguale sezione  $A'_s = 400$  mm<sup>2</sup>, braccio di leva  $(700 - 50) = 650$  mm che realizza  $M' = 400 \cdot 391 \cdot 650 = 101$  kNm;
- la seconda, pari a  $M = 426 - 101 = 325$  kNm, con calcestruzzo compresso e armature tese.

Con le formule precedenti risulta:  $x = 147$  mm;  $F_c = 506$  kN e  $A_s = 1293$  mm<sup>2</sup>. In definitiva l'armatura richiesta al lembo superiore è  $(400+1293) = 1693$  mm<sup>2</sup>, a quello inferiore  $400$  mm<sup>2</sup>. All'asse neutro  $(x/d) = 147/700 = 0,21$  corrisponde  $\delta = 0,44+1,25 \cdot 0,21 = 0,70$ , pari a quello proposto.

La ridistribuzione del 30% è quindi ammissibile. Il prospetto A4.11 riporta in sintesi le armature della sezione di appoggio intermedio necessarie nelle tre ipotesi di ridistribuzione.



**Prospetto A4.11** Momenti e armature della sezione di appoggio per il carico ultimo di progetto.

$\delta$	$M_{Ed}$ (kNm)	$A_s$ (mm <sup>2</sup> )	$A'_s$ (mm <sup>2</sup> )
1,00	609	2541	500
0,80	487	1974	400
0,70	426	1693	400

I calcoli sopra riportati possono riuscire spediti con l'uso della Tabella U1 relativa allo stato limite ultimo caratterizzata da soluzioni con  $\omega'/\omega = 0,2$ .

Nel prospetto A4.12 sono riportati i valori di:  $\delta$ ,  $M_{Ed}$ ,  $\mu_u = \frac{M_{Ed}}{bd^2 f_{cd}}$ ,  $\xi$ ,  $\omega$ ,  $A_s$ ,  $A'_s$

**Prospetto A4.12** Momenti flettenti di SLU e armature (soluzione tabellare).

$\delta$	$M_{Ed}$ kNm	$\mu_u$	$\xi$	$\omega$	$A_s$ mm <sup>2</sup>	$A'_s$ mm <sup>2</sup>
1,00	609	0,2915	0,330	0,335	2548	509
0,80	487	0,2334	0,258	0,262	1992	400
0,70	426	0,2041	0,223	0,225	1711	342

Si può osservare la sostanziale concordanza dei risultati.

#### 4.5.4 Verifiche a taglio e progetto delle armature (staffe verticali) – Riferimento al cap. 8

Si esamina la campata C-D nella condizione di carico variabile 3, soggetta ai momenti ultimi  $M_C = -609$  kNm e  $M_D = -333$  kNm (si prescinde dalla ridistribuzione che comporta una variazione di taglio modesta). Il taglio sollecitante allo stato limite ultimo  $V_{Ed}$  a destra dell'appoggio C risulta dall'equilibrio dei momenti rispetto a D

$$M_C + V_{Ed} \ell - (g_k \gamma_G + q_k \gamma_Q) \ell^2/2 = M_D$$

ossia, sostituendo:

$$-609 + V_{Ed} \cdot 10 - (31,88 + 30) 100/2 = -333, \text{ da cui } V_{Ed} = 337,0 \text{ kN}$$

Il diagramma  $V$  è riportato nella figura A4.7.

Il massimo taglio resistente vale (formula [6.9]) con  $\theta = 45^\circ$ , essendo  $z = 0,9 \cdot 700 = 630$  mm e  $v f_{cd} = 8,50$  N/mm<sup>2</sup>:

$$V_{Rd,max} = 0,5 \cdot 250 \cdot 630 \cdot 8,50 = 669 \text{ kN, maggiore di } V_{Ed}.$$

L'angolo  $\theta = 0,5 \cdot \arcsin [2 \cdot 337600 / (8,50 \cdot 250 \cdot 630)] = 15,1^\circ$  (cfr. punto 8.1.3.2) è minore di  $21,80^\circ$  per cui, assumendo  $\theta = 26,56^\circ$ ,  $\cot \theta = 2,0$ , con la [6.8] si ottiene:

$$A_{sw}/s = 337000 / (630 \cdot 391 \cdot 2,0) = 0,684 \text{ mm}^2/\text{mm}.$$

Ponendo  $s = 200$  mm, viene  $A_{sw} = 136 \text{ mm}^2$ , ampiamente soddisfatti con staffe di diametro 10 mm a 2 bracci ( $A_{sw} = 78 \cdot 2 = 156 \text{ mm}^2$ ). Tale staffatura può essere ridotta nel tratto centrale della trave come viene qui esposto.

Valore del taglio  $V_{Rdc}$  al di sotto del quale si può disporre solo l'armatura minima.

Con la [6.2a], essendo  $k = 1 + \sqrt{\frac{200}{700}} = 1,54$ ;  $\rho_l = \frac{1568}{250 \cdot 700} = \frac{0,90}{100}$  risulta:

$$V_{Rdc} = \left[ \frac{0,18}{1,50} \cdot 1,54 \cdot (0,90 \cdot 30)^{1/3} \right] \cdot 250 \cdot 700 = 96 \text{ kN}$$

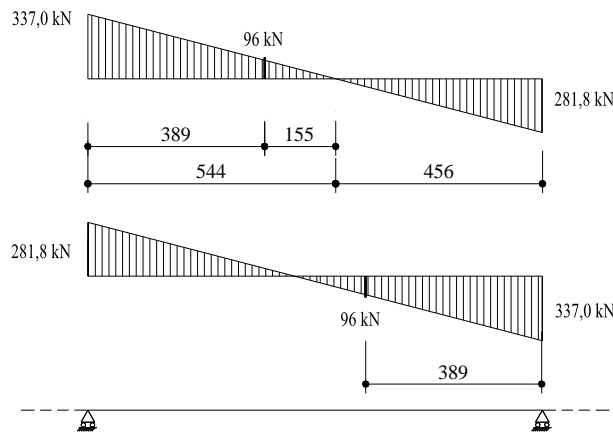
Il tratto in cui  $V_{Ed} < V_{Rdc}$  si estende per  $10 - 2 \cdot 3,89 = 2,22$  m centrali della trave, come si evince dalla fig. 4.15 in cui è riportato anche il diagramma  $V_{Ed}$  relativo alla configurazione con i momenti di continuità scambiati fra loro. Per tale tratto la [9.5N] richiede:

$$\rho_{w,\min} = \left( \frac{A_{sw}}{s \cdot b_w} \right)_{\min} = (0,08 \cdot \sqrt{f_{ck}}) / f_{yk} = (0,08 \cdot \sqrt{30}) / 450 = \frac{0,0974}{100}$$

Disponendo staffe a 2 bracci di diametro 8 mm con  $s = 300$  mm viene:

$$\rho_w = \frac{2 \cdot 50}{300 \cdot 250} = \frac{0,133}{100} > \rho_{w,\min}$$

Per affrontare la forza di trazione longitudinale conseguente al taglio, si effettua la traslazione del diagramma  $M$  della quantità  $a_\ell = z \cdot (\cot\theta - \cot\alpha)/2$ , in conformità e analogia con l'esempio della fig. [9.2]. Nel caso presente, essendo  $\cot\theta = 2$  e  $\cot\alpha = 0$  (staffe verticali), risulta  $a_\ell = z = 630$  mm.



**Figura A4.7** Diagrammi del taglio allo stato limite ultimo.

#### 4.5.5 Connessione anima-piattabanda

##### 4.5.5.1 Campi di applicazione

La metodologia di calcolo è trattata al punto 8.1.7 del Cap. 8 con riferimento a [6.2.4] dell'EC2.

Per il campo  $M(-)$  si considera la combinazione di carico permanente + carico variabile schema 3 con ridistribuzione  $\delta = 0,80$  (4.3.7.3 a); per il campo  $M(+)$  la combinazione carico permanente + carico variabile schema 2 con  $\delta = 1,0$  (4.3.7.2).

Nel primo caso il campo  $M(-)$  si estende nella campata per 2 m a partire dall'appoggio lungo i quali il braccio di leva  $z$  della coppia interna vale 0,60 m. Pertanto, come prescritto in [6.2.4(2)] e richiesto in 8.1.7, per il calcolo si considera il tratto pari alla metà della distanza fra il punto di momento minimo e il punto di nullo, ossia  $\Delta x = 1$  m a partire dall'appoggio. In tale tratto il momento passa dal valore  $-487$  kNm a  $-209$  kNm, con  $\Delta M = 278$  kNm.

In tale tratto la variazione dello sforzo di trazione vale  $\frac{\Delta M}{z} = \frac{278}{0,60} = 463$  kN.

Nel secondo caso il campo  $M(+)$  si estende per m 3,50 da una parte e dall'altra della mezzera lungo i quali il braccio di leva  $z$  vale 0,625 m. Alla distanza  $\Delta x = 3,50/2 = 1,75$  m dal punto di nullo verso la mezzera il momento assume il valore  $M = + 286$  kNm e tale è la variazione da prendere in conto. In tale tratto la variazione dello sforzo di trazione vale

$$\frac{\Delta M}{z} = \frac{286}{0,625} = 458 \text{ kN}.$$

##### 4.5.5.2 Calcolo delle larghezze $b_{\text{eff}}$ relative ai due tratti in esame

Campo  $M(-)$

$$\ell_o = 0,15(10,0 + 10,0) = 3,0 \text{ m}$$

$$b_1 = \frac{1}{2}(4,0 - 0,25) = 1,875 \text{ m}$$

$$b_{\text{eff1}} = 0,2 \cdot 1,875 + 0,1 \cdot 3,0 = 0,675 \text{ m} > 0,2 \cdot \ell_o = 0,2 \cdot 3,0 = 0,60 \text{ m} \quad [(5.7a)]$$

Essendo  $b_{\text{eff1}} = 0,60$  m, risulta

$$b_{\text{eff}} = 2 \cdot 0,60 + 0,25 = 1,45 \text{ m} \quad [5.7]$$

Campo  $M(+)$

$$\ell_o = 0,7 \cdot 10 = 7,0 \text{ m}$$

$$b_1 = \frac{1}{2}(4,0 - 0,25) = 1,875 \text{ m}$$

$$b_{\text{eff1}} = 0,2b_1 + 0,1 \ell_o = 0,2 \cdot 1,875 + 0,1 \cdot 7,0 = 1,075 \text{ m} < 0,2 \cdot \ell_o = 1,40 \text{ m} \quad [(5.7a)]$$

Essendo

$$1,075 < 1,40 \quad [(5.7b)]$$

risulta

$$b_{\text{eff}} = 1,075 \cdot 2 + 0,25 = 2,40 \text{ m} < 4,00 \text{ m} \quad [5.7]$$

**4.5.5.3 Forza tangenziale trasmessa su un lato della trave nel tratto  $\Delta x$ . Verifica delle tensioni e calcolo dell'armatura di collegamento.**

Le formule sono sviluppate al punto 8.1.7.

Campo M(-)

In questo campo per la trave si assume, come in precedenza, il braccio di leva  $z = 0,60$  m.

$$\text{Essendo } \eta = \frac{b_w}{b_{eff}} = \frac{0,25}{1,45} = 0,17$$

la forza tangenziale trasmessa all'anima dall'una o dall'altra parte della piattabanda vale:

$$\Delta F_d = \frac{\Delta M (1 - \eta)}{2z} = \frac{278 \cdot (1 - 0,17)}{2 \cdot 0,60} = 193 \text{ kN}$$

e la tensione tangenziale risulta:

$$\nu_E = \frac{\Delta F_d}{h_f \Delta x} = \frac{193000}{150 \cdot 1000} = 1,29 \text{ N/mm}^2$$

Assumendo nel rispetto dell'EC2 [6.2.4(4)Nota]) l'angolo di inclinazione delle bielle compresse  $\theta_f = 38,6^\circ$ , a cui corrisponde:  $\sin \theta_f = 0,6247$ ;  $\cos \theta_f = 0,7809$ ;  $\tan \theta_f = 0,80$ , risulta:

$1,29 < \nu \cdot f_{cd} \cdot \sin \theta_f \cdot \cos \theta_f = 0,5 \cdot 17 \cdot 0,6247 \cdot 0,7809 = 4,14 \text{ N/mm}^2$ , come richiede la [(6.22)].

L'armatura necessaria, per la [(6.21)], deve essere :

$$\frac{A_s}{s_f} \geq \frac{\nu_E \cdot h_f \cdot \tan \theta_f}{f_{yd}} = \frac{1,29 \cdot 150 \cdot 0,80}{391} = 0,40 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

Se  $s_f$ , passo dell'armatura, viene assunto pari a 150 mm, risulta  $A_s \geq 60 \text{ mm}^2$ .

Campo M(+)

In questo campo per la trave si assume (penultimo capoverso del punto 4.3.7.2)  $z = 0,625$  m.

$$\text{Essendo } \eta = \frac{b_w}{b_{eff}} = \frac{0,25}{2,40} = 0,10$$

la forza tangenziale trasmessa all'anima dall'una o dall'altra parte della piattabanda vale:

$$\Delta F_d = \frac{\Delta M (1 - \eta)}{2z} = \frac{286 \cdot (1 - 0,10)}{2 \cdot 0,625} = 206 \text{ kN}$$

e la tensione tangenziale risulta:

$$\nu_E = \frac{\Delta F_d}{h_f \Delta x} = \frac{206000}{150 \cdot 1750} = 0,79 \text{ N/mm}^2$$

Assumendo nel rispetto dell'EC2 [6.2.4(4)Nota]) l'angolo di inclinazione delle bielle compresse

$$\theta_f = 38,6^\circ$$

a cui corrisponde:  $\sin \theta_f = 0,6247$ ;  $\cos \theta_f = 0,7809$ ;  $\tan \theta_f = 0,80$ , risulta:

$$0,79 < \nu \cdot f_{cd} \cdot \sin \theta_f \cdot \cos \theta_f = 0,5 \cdot 17 \cdot 0,6247 \cdot 0,7809 = 4,14 \text{ N/mm}^2$$

come richiede la [(6.22)].

L'armatura necessaria deve essere:

$$\frac{A_s}{s_f} \geq \frac{\nu_E \cdot h_f \cdot \tan \theta_f}{f_{yd}} = \frac{0,79 \cdot 150 \cdot 0,80}{391} = 0,25 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

Se il passo dell'armatura è  $s_f = 150 \text{ mm}$ , risulta  $A_s \geq 38 \text{ mm}^2$

La disposizione delle armature di collegamento deve essere associata a quella delle armature di flessione della soletta.

#### 4.5.6 Calcolo della soletta

Analisi dei carichi allo SLU

- Peso proprio della soletta:  $0,15 \cdot 25 \cdot 1,3 = 4,875 \text{ kN/m}$
- Carico permanente portato:  $1,25 \cdot 1,5 = 1,875 \text{ kN/m}$
- Totale:  $6,75 \text{ kN/m}$
- Carico variabile:  $5,0 \cdot 1,5 = 7,50 \text{ kN/m}$

Le sollecitazioni di stato limite ultimo, calcolate facendo riferimento ad una campata interna di soletta e tenendo conto delle combinazioni di carico più gravose, risultano:

- Momento negativo (appoggio):  $M = -22,85 \text{ kNm}$
- Momento positivo (campata):  $M = 14,76 \text{ kNm}$

Progetto delle armature per il momento negativo

$$\mu = \frac{22850000}{1000 \cdot 125^2 \cdot 17} = 0,0860.$$

Dalla Tabella U1 dell'Appendice (Cap.13), per  $\omega'/\omega = 0,2$ , viene  $\omega = 0,09$

$$A_{s,\text{sup}} = 0,09 \cdot \frac{1000 \cdot 125 \cdot 17}{391} = 489 \text{ mm}^2/\text{m}, \text{ ovvero } 73 \text{ mm}^2/150 \text{ mm}$$

$$A_{s,\text{inf}} = 0,2 \times 73 = 15 \text{ mm}^2/150 \text{ mm}$$

Progetto delle armature per il momento positivo

$$\mu = \frac{14760000}{1000 \cdot 125^2 \cdot 17} = 0,0556. \text{ Dalla Tabella U1 per } \omega'/\omega = 0,3 \text{ viene } \omega = 0,0565$$

$$A_{s,\text{inf}} = 0,0565 \cdot \frac{1000 \cdot 125 \cdot 17}{391} = 307 \text{ mm}^2/\text{m}, \text{ ovvero } 46 \text{ mm}^2/150 \text{ mm}$$

$$A_{s,\text{sup}} = 0,3 \times 46 = 15 \text{ mm}^2/150 \text{ mm}$$

L'armatura complessiva all'incastro della soletta è costituita dalla quota relativa alla flessione e dalla quota relativa al collegamento anima-ala. Quest'ultima viene distribuita in parti uguali all'estradosso e all'intradosso della soletta.

Si riportano qui i risultati. Si precisa che in tutti i casi il passo delle armature è fissato in 150 mm.

a) Tratto in cui la trave è soggetta a momento negativo:

$$A_{s,\text{sup}} = (73 + 60/2) = 105 \text{ mm}^2/150 \text{ mm}; \text{ disposti } 78+50 = 128 \text{ mm}^2/150 \text{ mm}$$

$$A_{s,\text{inf}} = (15 + 60/2) = 45 \text{ mm}^2/150 \text{ mm}; \text{ disposti } 50 = 128 \text{ mm}^2/150 \text{ mm}$$

b) Tratto in cui la trave è soggetta a momento positivo:

$$A_{s,\text{sup}} = (73 + 30/2) = 92 \text{ mm}^2/150 \text{ mm}; \text{ disposti } 78 + 50 = 128 \text{ mm}^2/150 \text{ mm}$$

$$A_{s,\text{inf}} = (15 + 30/2) = 34 \text{ mm}^2/150 \text{ mm}; \text{ disposti } 50 \text{ mm}^2/150 \text{ mm}$$

c) Campi di soletta soggetti a  $M(+)$

$$A_{s,\text{inf}} = 46 \text{ mm}^2/150 \text{ mm}; \text{ disposti } 50 \text{ mm}^2/150 \text{ mm}$$

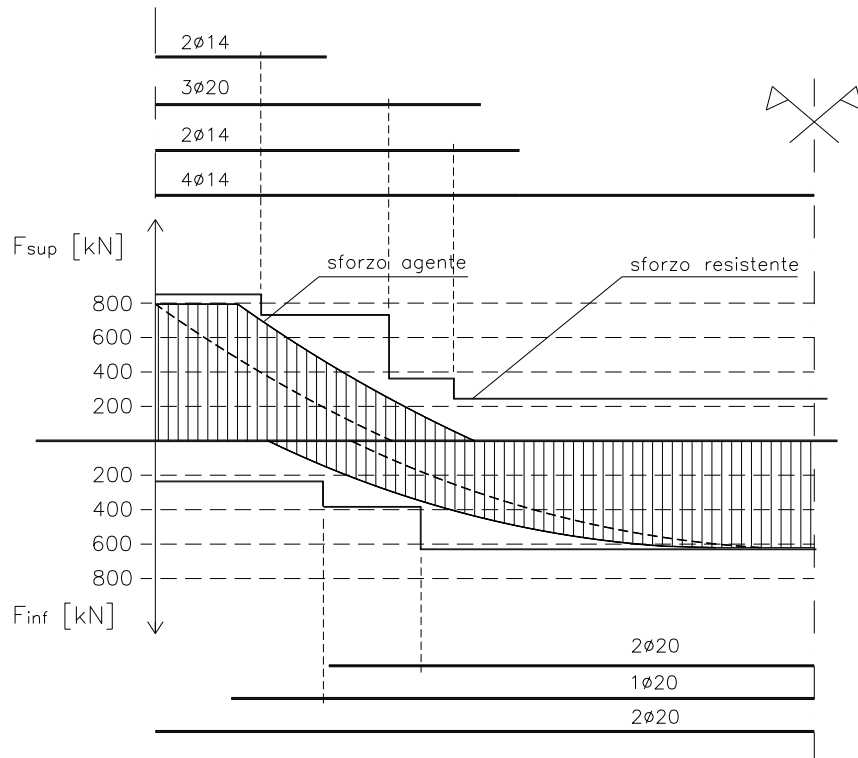
$$A_{s,\text{sup}} = 0,3 \times 46 = 14 \text{ mm}^2/150 \text{ mm}; \text{ disposti } 50 \text{ mm}^2/150 \text{ mm}.$$

Nella figura 4.18 è rappresentato lo schema dell'armatura come sopra definito.

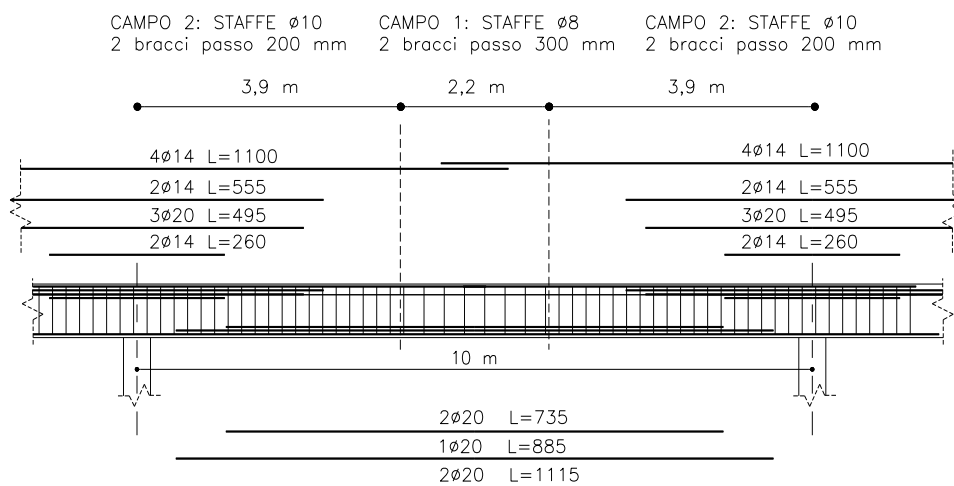
#### 4.5.7 Disposizione delle armature

La figura A4.8 propone un esempio di disposizione delle armature facendo riferimento all'involuppo delle sollecitazioni (per la mezzeria: carico permanente + carico variabile schema 2; per l'appoggio di continuità: carico permanente + carico variabile schema 3) con ridistribuzione del momento di continuità  $\delta = 0,8$ . Nella figura sono riportati gli sforzi agenti nei correnti superiore e inferiore tenendo conto della traslazione del diagramma del momento flettente e il diagramma degli sforzi resistenti. Si fa notare che l'armatura longitudinale di intradosso in corrispondenza degli appoggi è costituita da 2 barre di diametro 20 mm, tali da soddisfare quanto richiesto al punto [9.2.1(5)], ossia almeno il 25% dell'armatura disposta in campata, che nel caso presente è costituita da 5 barre dello stesso diametro. L'armatura di estradosso a cavallo dell'appoggio sarà distribuita in parte sulla nervatura, in parte sui due tratti di soletta adiacenti nel limite di  $b_{\text{eff}}$ , come previsto in [9.2.1.2(2)] e illustrato nella fig.[9.1] e nella nostra A4.12.

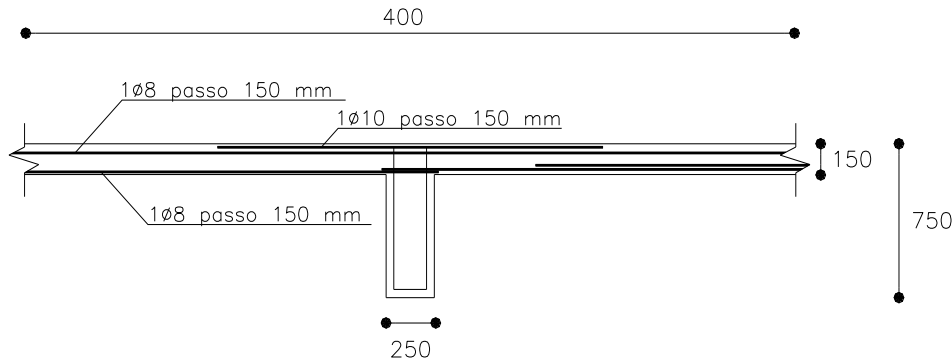
Nella disposizione dell'armatura l'esigenza è stata soddisfatta con un lieve eccesso. Nella figura A4.9 è rappresentata la disposizione dell'armatura longitudinale e trasversale per la campata, nella figura A4.10 è proposta la disposizione delle armature relative alla connessione trave-soletta.



**Figura A4.8** Forze agenti e forze resistenti nei correnti superiore ed inferiore della trave.



**Figura A4.9** Disposizione delle armature longitudinali e trasversali.



**Figura A4.10** Disposizione delle armature nella connessione anima-piattabanda.

#### 4.5.8 Verifiche in esercizio

I procedimenti di verifica agli stati limite di esercizio sono contenuti nel Capitolo 11.

##### 4.5.8.1 Verifiche tensionali

Le verifiche valgono sia per l'EC2 che per le NTC.

Secondo il punto [7.2(2)] le massime tensioni consentite sono:

- per il calcestruzzo:  $0,6 f_{ck} = 18 \text{ N/mm}^2$
- per l'acciaio:  $0,80 f_{yk} = 360 \text{ N/mm}^2$

##### Sezione di appoggio intermedio

Si considera la condizione di carico caratteristica rappresentata dal carico permanente e dal carico variabile nella configurazione più sfavorevole (la stessa assunta per lo stato limite ultimo).

Il momento negativo sull'appoggio C vale:

$$-23,75 \cdot 10^2 / 12 - 20 \cdot 10^2 \cdot 0,114 = -425,9 \text{ kNm}$$

Tale valore, rapportato al momento di progetto a stato limite ultimo senza redistribuzione ( $-609 \text{ kNm}$ ), rappresenta il 70%; rapportato al momento redistribuito del 20% ( $-487 \text{ kNm}$ ), rappresenta l'87%; infine, rapportato al momento redistribuito del 30% ( $-426 \text{ kNm}$ ) è praticamente il 100%.

Le verifiche vengono sviluppate con notazioni adimensionali, facendo ricorso alle tabelle per la determinazione di  $\frac{\xi}{i}$  e di  $\frac{1-\xi}{i}$  e quindi delle tensioni.

Momento di esercizio nella combinazione caratteristica:  $M = -425,9 \text{ kNm}$

$$\text{Momento adimensionale } \mu = \frac{425,9 \cdot 10^6}{250 \cdot 700^2 \cdot 17} = 0,2045$$

Partendo dai valori  $A_s$  di progetto allo stato limite ultimo, si calcolano i rapporti geometrici  $\rho = \frac{A_s}{bd}$  e  $\rho' = 0,2\rho$ .



In funzione di questi, con la Tabella E3, si determina:

$$\frac{\xi}{i}, \frac{1-\xi}{i}$$

e successivamente  $\frac{\sigma_c}{f_{ck}}$  e  $\frac{\sigma_s}{f_{yk}}$ .

**Prospetto A4.13** Verifiche in esercizio: dati geometrici.

$\delta$	$100\rho$	$\rho'/\rho$	$\xi/i$	$(1-\xi)/i$
1,00	1,45	0,20	4,479	5,382
0,80	1,13	0,20	4,825	6,833
0,70	0,97	0,23	5,211	7,910

Per esempio, con l'armatura richiesta per  $\delta = 0,80$  ( $A_s = 1974 \text{ mm}^2$ ;  $\rho = 1,13/100$ ;  $\rho'/\rho = 0,20$ ) risulta:

$$\sigma_c = \mu \frac{\xi}{i} f_{cd} = 0,2045 \cdot 4,825 \cdot 17 = 16,7 \text{ N/mm}^2; \quad \frac{\sigma_c}{f_{ck}} = 0,56$$

$$\sigma_s = \mu \frac{1-\xi}{i} \alpha_e f_{cd} = 0,2045 \cdot 6,833 \cdot 15 \cdot 17 = 356 \text{ N/mm}^2; \quad \frac{\sigma_s}{f_{yk}} = 0,79.$$

Se per il medesimo caso (ridistribuzione  $\delta = 0,80$ ) si ripete il calcolo considerando le armature proposte con lo schema della fig. A4.9 ( $A_s = 2174 \text{ mm}^2$ ,  $A'_s = 628 \text{ mm}^2$ ), risultano tensioni leggermente inferiori.

I valori delle tensioni in funzione di  $\delta$  sono consegnati nel prospetto A4.14.

**Prospetto A4.14** Verifiche in esercizio: tensioni.

$\delta$	$\sigma_c$	$\sigma_c/f_{ck}$	$\sigma_s$	$\sigma_s/f_{yk}$
1,00	15,5	0,51	280,0	0,62
0,80	16,7	0,56	356,0	0,79
0,70	18,0	0,59	411,2	0,90

Dal prospetto 4.15 si evince che la ridistribuzione  $\delta = 0,80$  è ammissibile, mentre quella  $\delta = 0,70$  comporterebbe tensioni eccessive nelle armature tese.

#### Sezione di mezzzeria

Si assume la larghezza della plattabanda pari a 1000 mm, minore di quella consentita dal punto [5.3.2.1].

Il momento di esercizio nella combinazione caratteristica vale

$$M = 10^2 \cdot \left( \frac{23,75}{24} + \frac{20,00}{12} \right) = 265,6 \text{ kNm}$$

Il momento ridotto adimensionale risulta

$$\mu = \frac{265,6 \cdot 10^6}{1000 \cdot 700^2 \cdot 17} = 0,0319$$

La sezione a T è armata con 1568 mm<sup>2</sup>. Il rapporto geometrico  $\rho$  vale:

$$\rho = \frac{1568}{1000 \cdot 700} = 0,0022$$

Essendo

$$w = h_f/d = 150/700 = 0,214 \text{ e}$$

$$n = b/b_w = 1000/250 = 4,$$

si adotta la tabella relativa a  $w = 0,20$  e  $n = 4$  (Tabella E6 dell'Appendice). Da questa si deduce, per

$$\rho = 0,0022: \frac{\xi}{i} = 9,62; \frac{1-\xi}{i} = 32,73.$$

Le tensioni relative risultano:

$$\text{nel calcestruzzo: } \frac{\sigma_c}{f_{ck}} = 0,0319 \cdot 9,62 \cdot \frac{0,85}{1,50} = 0,17 < 0,60$$

$$\text{nell'armatura: } \frac{\sigma_s}{f_{yk}} = 0,0319 \cdot 15 \cdot 32,73 \cdot \frac{17}{450} = 0,59 < 0,80.$$

#### 4.5.8.2 Verifiche a fessurazione

##### Sezione di mezzaria

Nella combinazione di carico quasi permanente, con carico permanente e carico variabile secondo lo schema 2, risulta:

$$g_k = 23,75 \text{ kN/m}$$

$$0,6q_k = 0,6 \cdot 20 = 12 \text{ kN/m}$$

Momento in mezzaria:

$$M = 10^2 \cdot \left( \frac{23,75}{24} + \frac{12}{12} \right) = 199 \text{ kNm}$$

Il momento ridotto vale:

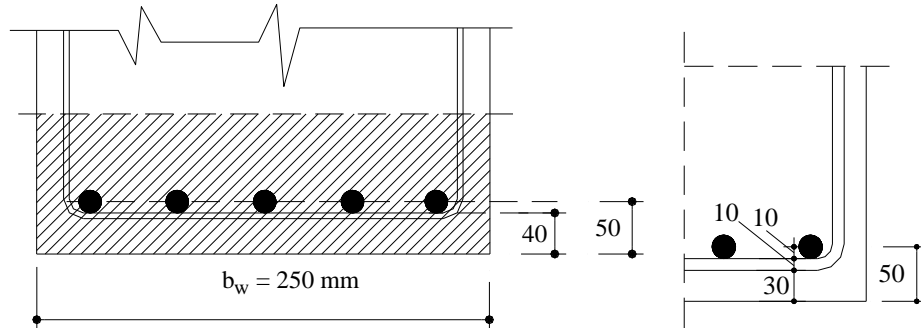
$$\mu = \frac{199 \cdot 10^6}{1000 \cdot 700^2 \cdot 17} = 0,0239$$

Armatura tesa  $A_s = 1568 \text{ mm}^2$  (si confronti il penultimo capoverso del paragrafo 4.3.7.2)

Con i valori già utilizzati per la verifica tensionale nella condizione caratteristica, si ottiene:

$$\sigma_s = 0,0239 \cdot 32,73 \cdot 15 \cdot 17 = 200 \text{ N/mm}^2$$

Il calcolo dell'apertura delle fessure viene condotto secondo il punto [7.3.4].



**Figura A4.11** Sezione di campata: computo dell'area  $A_{c,eff}$ .

Intervallo massimo tra le fessure

$$s_{r,max} = k_3 c + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \frac{\phi}{\rho_{p,eff}} \quad [7.11]$$

Nella [7.11]:

$$k_3 = 3,4$$

$c = 40$  mm, ricoprimento delle barre,

$k_1 = 0,8$  (acciaio ad aderenza migliorata),

$k_2 = 0,5$  (flessione),

$k_4 = 0,425$ ,

$\phi = 20$  mm,

$$\rho_{p,eff} = \frac{A_s}{A_{c,eff}}; A_{c,eff} = b_w \cdot h_{c,eff}; h_{c,eff} = 2,5 \cdot (h - d) = 2,5 \cdot (750 - 700) = 125 \text{ mm}$$

$$\rho_{p,eff} = \frac{5 \cdot 314}{250 \cdot 125} = \frac{5}{100}$$

Risulta:

$$s_{r,max} = 3,4 \cdot 40 + 0,8 \cdot 0,5 \cdot 0,425 \cdot \frac{20}{0,05} = 136 + 68 = 204 \text{ mm}$$

La deformazione media dell'acciaio, dedotta la deformazione del calcestruzzo compreso fra le fessure, si valuta con l'espressione

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_e \cdot \rho_{p,eff})}{E_s} \geq 0,6 \frac{\sigma_s}{E_s} \quad [7.9]$$

Nel caso presente:

$$\sigma_s = 200 \text{ N/mm}^2$$

$k_t = 0,4$  (lunga durata)

$f_{ct,eff} = f_{ctm}$  che, per  $f_{ck} = 30 \text{ N/mm}^2$ , vale  $2,9 \text{ N/mm}^2$

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cm}} = \frac{200000}{33000} = 6,06$$

viene:

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{200 - 0,4 \cdot \frac{2,9}{0,05} (1 + 6,06 \cdot 0,05)}{200000} = \frac{200 - 30}{200000} = \frac{0,85}{1000}$$

questo è maggiore di  $0,6 \frac{\sigma_s}{E_s} = \frac{0,6 \cdot 200}{200000} = \frac{0,60}{1000}$

L'apertura  $w_k$ , per la [7.8], vale:

$$w_k = s_{r\max} \cdot (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = 204 \cdot \frac{0,85}{1000} = 0,17 \text{ mm}$$

### Sezione di appoggio di continuità

Nella combinazione di carico quasi permanente, con carico permanente e carico variabile secondo lo schema 3, risulta:

$$M = -23,75 \cdot \frac{10^2}{12} - 0,6 \cdot 20 \cdot 10^2 \cdot 0,114 = -(198 + 137) = -335,0 \text{ kNm}$$

(per il coefficiente 0,114 si veda il prospetto 4.10)

Il momento ridotto vale:

$$\mu = \frac{335,0 \cdot 10^6}{250 \cdot 700^2 \cdot 17} = 0,16$$

Con i valori già utilizzati per la verifica tensionale nella condizione caratteristica (prospetto 4.15), si ottiene per proporzionalità:

$$\sigma_s = \frac{0,16}{0,2045} \cdot 356 = 277 \text{ N/mm}^2$$

Essendo l'area della sezione di armatura ( $3\phi 20 + 8\phi 14$ ) = 2174 mm<sup>2</sup> come risulta dalla fig. 4.17 che riporta lo schema di armatura proposto, si deduce:

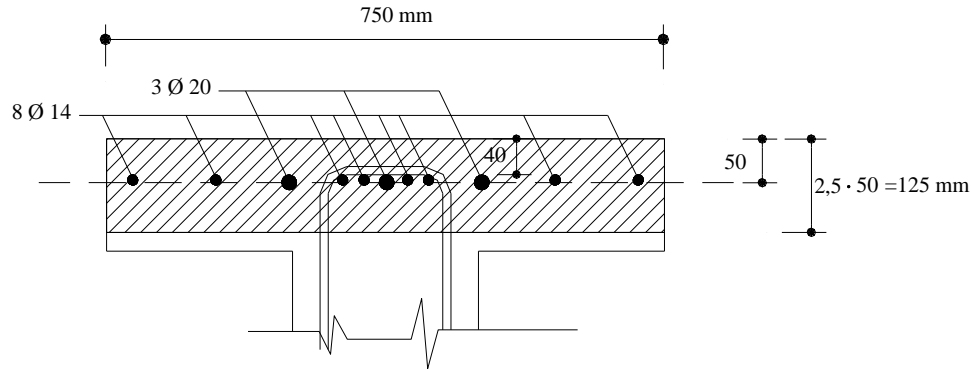
$$\rho_{p,\text{eff}} = \frac{2174}{750 \cdot 125} = \frac{2,32}{100}$$

La larghezza del tratto di soletta associata alla nervatura che viene presa in conto per definire  $A_{c,\text{eff}}$  è stata fissata in 750 mm in ragione della disposizione delle armature; tale valore è inferiore a quello che sarebbe disponibile secondo i punti [5.3.2.1(3)] e [9.2.1.2(2)].

La distribuzione delle armature della fig. A4.12 rispetta la condizione che la distanza fra le barre sia non superiore a  $5(c + \phi/2) = 5(40 + 20/2) = 250 \text{ mm}$  perché in tale ambito le armature governano la fessurazione (fig. [7.2], particolare D).

L'intervallo massimo tra le fessure e la deformazione risultano:

$$s_{r,\max} = k_3 c + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \frac{\phi}{\rho_{p,\text{eff}}} = 3,4 \cdot 40 + 0,8 \cdot 0,50 \cdot 0,425 \cdot \frac{20}{0,0232} = 136 + 146 = 282 \text{ mm}$$



**Figura A4.12** Sezione di appoggio: computo dell'area  $A_{c,eff}$ .

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{277 - 0,4 \frac{2,9}{0,0232} (1 + 6,06 \cdot 0,0232)}{200000} = \frac{277 - 52}{200000} = \frac{1,10}{1000} > \frac{0,6 \cdot 278}{200000} = \frac{0,83}{1000}$$

L'apertura  $w_k$ , per la [7.8], vale:

$$w_k = s_{r,max} \cdot (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = 282 \cdot \frac{1,10}{1000} = 0,31 \text{ mm}$$

#### 4.5.8.3 Verifica dell'inflessione nella combinazione di carico di esercizio quasi permanente.

La sezione di mezzzeria della generica campata della trave continua presenta rapporto geometrico di armatura  $\rho = 0,0022$  (cfr. 4.3.7.8.1). Per le motivazioni espresse nel nostro punto 11.4 (cap.11) il confronto della snellezza con quella della [(7.16 a)] denota che non vi sono problemi di inflessione eccessiva. Pur tuttavia, a titolo di esempio, si sviluppa il calcolo dell'inflessione con le formule (7.18) e (7.19) dell'Eurocodice, come illustrato nel nostro punto 11.4.

Precisamente, si calcola l'inflessione in mezzzeria con la [(7.18)] combinando l'inflessione calcolata con sezioni integre ( $f_1$ ) e quella con sezioni parzializzate ( $f_2$ ) a tempo infinito, tenendo conto dell'effetto "tension stiffening".

##### • Moduli di elasticità

Al calcestruzzo C30/37 corrisponde  $E_{cm} = 33000 \text{ N/mm}^2$ . Per la valutazione a tempo infinito si assume  $\varphi = 2$ . Quindi risulta con la [(7.20)]  $E_{c,\infty} = \frac{33000}{(1+2)} = 11000 \text{ N/mm}^2$ .

Per il calcolo del momento di fessurazione la sezione viene omogeneizzata con  $\alpha_e = \frac{200000}{33000} = 6,06$ . Con questo momento si determina il coefficiente di *tension stiffening*  $\zeta$ .

Per il calcolo dell'inflessione a tempo infinito, le sezioni, sia quelle integre che quelle parzializzate, vengono omogeneizzate con  $\alpha_e = \frac{200000}{11000} = 18,2$ .

- *Elenco delle caratteristiche geometriche e meccaniche*

**Sezione interamente reagente** ( $\alpha_e = 6,06$ )

Impiegando le formule del Cap. 11, punto 11.2.1.1.2, essendo

$$\rho_1 = \frac{A_s}{b \cdot h} = \frac{1568}{750 \cdot 1000} = 0,0021$$

$$n = \frac{b}{b_w} = \frac{1000}{250} = 4$$

$$w_1 = \frac{h_f}{h} = \frac{150}{750} = 0,20$$

$$p = \frac{d}{h} = \frac{700}{750} = 0,93$$

$$\alpha_e = 6,06$$

risulta:

$$\xi_1 = 0,368 ; i = 0,0405 ; \text{ da cui } x_G = 276 \text{ mm}; (h - x_G) = 474 \text{ mm}; I_1 = 1,70 \cdot 10^{10} \text{ mm}^4$$

**Sezione interamente reagente** ( $\alpha_e = 18,2$ )

$$\text{Risulta: } \xi_1 = 0,40 ; i = 0,0481 ; \text{ da cui } x_G = 300 \text{ mm}; (h - x_G) = 450 \text{ mm}; I_1 = 2028 \text{ mm}^4$$

**Sezione parzializzata** ( $\alpha_e = 18,2$ )

Formule del punto 11.2.1.2.3

$$\rho = \frac{1568}{700 \cdot 1000} = 0,0022$$

$$n = \frac{b}{b_w} = \frac{1000}{250} = 4$$

$$w = \frac{h_f}{d} = \frac{150}{700} = 0,2143$$

$$\alpha_e = 18,2$$

Risolvendo si ottiene:

$$A = 0,79$$

$$C = 0,45$$

$$\xi = 0,247$$

$$i = 0,0277$$

da cui  $x_G = 173 \text{ mm}$ ;  $I_2 = 0,95 \cdot 10^{10} \text{ mm}^4$

• *Sollecitazioni flessionali*

Per la combinazione di esercizio quasi permanente si assumono i carichi:

- peso proprio:  $18,75 \text{ kN/m}$
- carico permanente portato:  $5,00 \text{ kN/m}$
- carico variabile  $0,6 \times 20 = 12 \text{ kN/m}$  (schema 2)

$$\text{Momento in mezzzeria: } M_m = \frac{10^2}{24}(18,75 + 5,0) + \frac{10^2}{12} \cdot 12 = 99 + 100 = 199 \text{ kNm}$$

$$\text{Momento agli appoggi: } M_{\text{app}} = -\frac{10^2}{12}(18,75 + 5,0) - \frac{10^2}{24} \cdot 12 = -198 - 50 = -248 \text{ kNm}$$

Momento di fessurazione e coefficiente di *tension stiffening*

Per C30/37 la resistenza a trazione risulta  $f_{ctm} = 2,9 \text{ N/mm}^2$ . Pertanto si deduce:

$$\frac{M_{cr}(h - x_1)}{I_1} = 2,9 \quad \text{da cui}$$

$$M_{cr} = \frac{(1,70 \cdot 10^{10}) \cdot 2,9}{474} = 104 \text{ kNm}$$

Coefficiente di *tension stiffening*:

$$\zeta = 1 - 0,5 \cdot \left( \frac{M_{cr}}{M_m} \right)^2 = 1 - 0,5 \cdot \left( \frac{104}{199} \right)^2 = 0,86$$

• *Calcolo dell'inflessione*

Il diagramma del momento flettente della campata, essendo parabolico, può essere scomposto in:

- diagramma parabolico di trave appoggiata con ordinata in mezzzeria  
 $M_{\text{par}} = 248 + 199 = 447 \text{ kNm}$
- diagramma rettangolare di ordinata  $M_{\text{rett}} = -248 \text{ kNm}$

L'inflessione in mezzzeria è data dalla somma degli effetti delle due sollecitazioni:

$$f = \frac{5}{48} \cdot \frac{M_{\text{par}}}{EI} \ell^2 - \frac{M_{\text{rett}}}{8EI} \ell^2 = \frac{\ell^2}{EI} \cdot \left( \frac{5}{48} \cdot 447 - \frac{248}{8} \right) = 15,56 \frac{\ell^2}{EI}$$

e, applicando la [(7.18)]

$$f = f_1(1 - \zeta) + f_2\zeta$$

I valori numerici delle rigidezze  $EI$  sono:

$$E_{\infty} I_1 = 11000 \cdot 2,028 \cdot 10^{10} = 22,30 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2$$

$$E_{\infty} I_2 = 11000 \cdot 0,95 \cdot 10^{10} = 10,45 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2$$

Sostituendo si ottiene:

$$f_1 = \frac{15,56 \cdot 10^6 \cdot 10000^2}{22,30 \cdot 10^{13}} = 6,97 \text{ mm}$$

$$f_2 = \frac{15,56 \cdot 10^6 \cdot 10000^2}{10,45 \cdot 10^{13}} = 14,89 \text{ mm}$$

L'inflessione risulta pertanto:

$$f^* = 6,97 \cdot (1 - 0,86) + 14,89 \cdot 0,86 = 0,98 + 12,80 = 13,78 \text{ mm}$$

valore pari a  $\frac{\ell}{725}$ , minore di  $\frac{\ell}{250}$ .



