1 Strutture e materiali

1.1 Introduzione

L'evoluzione delle strutture e l'uso di materiali da costruzione sempre più prestazionali possono essere considerati paralleli all'evoluzione dell'uomo, dall'iniziale separazione dai primati fino ai giorni nostri dominati dall'Homo Sapiens Sapiens: una specie capace di modificare radicalmente l'ambiente che lo sostiene e di progettare non solo strutture sempre più complesse e maggiormente efficienti, ma anche di ideare nuovi materiali per i quali i limiti di alcuni decenni fa appaiono appartenere alla preistoria.

Gli antichi costruivano utilizzando elementi strutturali semplici e di facile realizzazione e conoscevano solo carichi di compressione e di trazione; i materiali erano limitati dalla disponibilità locale e comunque sostanzialmente naturali; la metodologia costruttiva generalmente era basata più sull'esperienza che sul ragionamento, una condotta costosa ma affidabile. E di fatti riuscirono a realizzare opere incredibili, non solo per l'audacia costruttiva, ma anche per la bellezza architettonica spesso legata alla purezza delle forme ed infine durabili, considerato che molte delle eredità del passato hanno attraversato i millenni, hanno resistito alle intemperie, ma soprattutto sono sopravvissute all'uomo. Probabilmente un'altra grande limitazione era dettata dalla mancanza di macchine che permettessero la costruzione di edifici adeguati ai fasti dell'antichità, un problema con il quale dovette fare i conti il grande architetto rinascimentale Filippo Brunelleschi nell'impegno di costruire la cupola di Santa Maria del Fiore a Firenze: un problema che affronteremo nel capitolo 9.

Gli antichi greci riuscirono a costruire il Partenone di Atene, addirittura intorno al 440 a.C., con una precisione geometrica mai più uguagliata, neanche dagli edifici moderni, soprattutto tenuto conto delle limitazioni dell'epoca e dei luoghi. E per tale capolavoro utilizzarono solo due elementi strutturali, il *pilastro* e la *trave*, ed un solo materiale, la pietra. Non solo: tale apparente semplicità costruttiva consentì loro di adottare anche la tecnica della prefabbricazione, per la verità molto diffusa nell'antichità, con gli elementi strutturali che arrivavano in cantiere, grezzi o già rifiniti, pronti per l'assemblaggio. Una tecnica che fu da loro sicuramente perfezionata e spinta ai massimi livelli, come dimostra la precisione degli accostamenti, la perfetta simmetria del tempio e la bellezza complessiva. Ma nonostante ciò i costruttori greci si dimostrarono pessimi ingegneri, dal momento che molti degli architravi risultarono lesionati per evidente carenza strutturale.

In effetti i materiali naturali in genere soffrono della limitazione di essere forti solo in trazione oppure in compressione e l'utilizzo dei materiali e la tipologia delle costruzioni sono stati per secoli condizionati da fattori ambientali e sociologici; basti pensare ai ponti a funi, per i quali sono state utilizzate le fibre vegetali, o alle piramidi, con struttura e rivestimento in bianca pietra calcarea.

Le piramidi d'Egitto furono costruite per affrontare quattro tipi di problemi: spirituale, quale il mistero della morte; politico, per l'affermazione del potere divino del faraone; sociale, con l'occupazione di ampie masse di contadini durante le fasi di piena del Nilo che rendeva fertile i terreni ma li privava del lavoro; scientifico, con la necessità di avere un

osservatorio per lo studio dei cieli. In ogni caso la forma a piramide, la roccia di base su cui furono fondate e la pietra per la costruzione le rendono strutturalmente efficienti per *carichi di compressione*, ovvero gli unici presenti. In altre parole la pietra all'epoca degli antichi egiziani rappresentava il miglior materiale per lo scopo prefisso: economico, diffuso, resistente ed affidabile, anche se pesante.

I fattori che nel passato condizionavano la scelta del materiale da costruzione erano quindi sostanzialmente non tanto di ordine statico quanto di tipo economico, viste le ingenti quantità di pietra utilizzate per i monumenti eretti dalle civiltà mediterranee e sudamericane. L'obiettivo principale era la riduzione dei costi di estrazione, lavorazione e trasporto, ragion per cui le cave dovevano, per quanto possibile, essere ubicate il più vicino possibile al cantiere e ciò ovviamente influiva sulla tipologia di pietra utilizzata e di conseguenza sul risultato finale in termini di resistenza e durabilità dell'opera. Nel caso particolare dell'antico Egitto fu l'esistenza di una proprietà statale delle cave a rendere possibile l'utilizzo di pietre pregiate, quali il granito di Assuan, il porfido rosso e le arenarie; mentre nella Roma imperiale il raggiungimento di tecnologie costruttive basate su una parziale standardizzazione delle metodologie esecutive e l'esistenza di un fitta rete stradale favorì la diffusione di pietre da costruzione provenienti da tutti gli angoli dell'Impero. Ma nelle altre civiltà non sempre era possibile.

In ogni caso la disponibilità di un materiale molto resistente a compressione e molto meno a trazione, qual'è la pietra, portò allo sviluppo di strutture inizialmente basate sul *sistema trilitico* (fig. 1.1), il quale da un punto di vista statico sfrutta il principio di trasmissione verticale dei carichi mediante l'utilizzo dell'appoggio semplice, probabilmente il primo tipo di vincolo ideato dall'uomo, come dimostrato anche dalla tipologia costruttiva di Stonehenge e dal Tempio dei due Castori a Roma. Il sistema trilitico è costituito da due elementi verticali, i pilastri, soggetti a sforzi di compressione, ed un elemento orizzontale, la trave o architrave, normalmente soggetta a carichi distribuiti sulla sua intera lunghezza e più raramente a carichi concentrati.

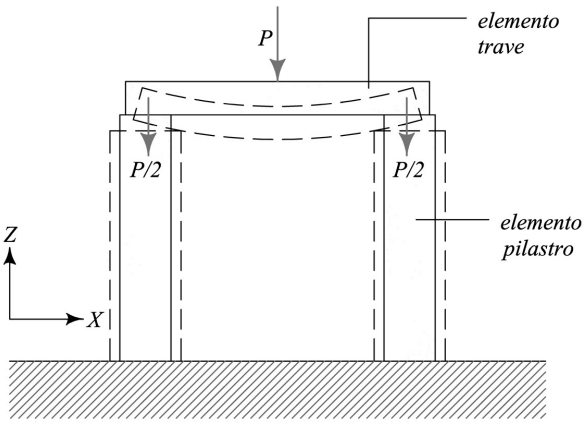

Figura 1.1 Il sistema trilitico prende origine dall'uso dei primi due elementi strutturali noti all'uomo: la trave e il pilastro, connessi con un semplice appoggio capace di trasmettere le forze lungo la sola direzione verticale.

Tale configurazione strutturale ammette nei pilastri unicamente la presenza e trasmissione di sollecitazioni verticali e deformazioni per schiacciamento, dal momento che l'appoggio semplice non consente la trasmissione dei momenti flettenti (nota 1.1), mentre l'architrave, sotto l'azione del peso proprio e dei carichi accidentali e permanenti subisce deformazioni per flessione, una incurvatura con concavità diretta verso l'alto di difficile perfezione per l'occhio umano; e ciò è dovuto, come vedremo meglio in seguito, al comportamento fragile della pietra, la quale manifesta una elevata resistenza fino al brusco raggiungimento delle condizioni di collasso. Un fenomeno spiacevole che ha afflitto per secoli le costruzioni del passato e che oggi spiega molti dei crolli di strutture in calcestruzzo armato.

Ma se la ripetizione laterale del sistema trilitico permise la costruzione dei tempi egizi e greci, la sua più logica e naturale evoluzione consentì di costruire i primi tentativi di spazi chiusi per semplice accostamento di un numero elevato di pilastri e di travi che condusse alla costruzione dei muri e delle piastre (o solai), come illustrato dalla fig. 1.2.

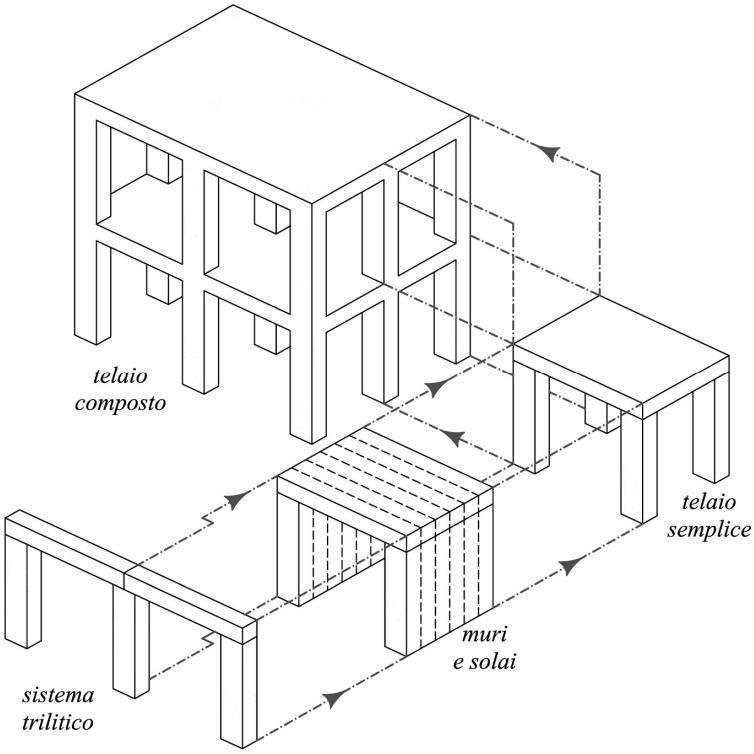

Figura 1.2 Il sistema trilitico può essere considerato il progenitore di tutte le strutture, poiché dalla ripetizione di una unità semplice sono sorti i sistemi costituiti da muri e solai. Con la comparsa dei materiali compositi, come il calcestruzzo armato, e l'affinamento dei processi produttivi dell'acciaio siamo arrivati infine all'introduzione delle moderne strutture intelaiate, che possono essere pensate come costituite dalla ripetizione continua dell'elemento trave e da quella discreta dell'elemento pilastro.

La scoperta e l'utilizzo di materiali moderni come il calcestruzzo armato e l'acciaio condusse infine all'evoluzione ultima del sistema trilitico, con la progettazione delle moderne strutture intelaiate apparse solo nel XIX secolo, il che comportò anche la modifica dei tipi di vincolo adottati che passarono dall'appoggio semplice all'utilizzo di cerniere ed incastri, con effetti finali molto differenti come riusciremo a scoprire nel proseguo del libro.

1.2 L'arco nella storia

Se il Partenone fosse stato costruito dagli antichi romani probabilmente avrebbe avuto una sorte diversa e forse anche un'estetica diversa, considerato che nell'antica Roma erano ben conosciute ed applicate le metodologie di confezionamento dei calcestruzzi, che anzi con loro raggiunsero una perfezione ancora oggi da eguagliare, come esploreremo nel capitolo 2. Durante l'impero romano furono eseguite opere di ingegneria idraulica e costruiti edifici per il culto famosi per le dimensioni, per la precisione e soprattutto per la robustezza, nonostante i loro costruttori si avvalessero più dell'esperienza che di un approccio teorico. Ma, ad onor del vero, occorre sottolineare che essi utilizzarono prevalentemente, e spesso solo, carichi di compressione, accoppiando due elementi, l'*arco* e il pilastro, evidentemente molto efficienti per le finalità strutturali. Nel contempo però iniziò ad essere utilizzato sempre più il primo vero materiale artificiale: il mattone.

Gli storici ritengono che l'uso dei mattoni abbia avuto origine presso le popolazioni dell'Asia minore e della Mesopotamia le quali, insediate lungo i grandi fiumi, erano costantemente afflitte dalla carenza della pietra naturale, tanto da iniziare ad impastare argilla cruda da essiccare al sole, forti di un clima che prometteva condizioni di caldo persistente. Ma se l'uso dei mattoni essiccati al sole si diffuse gradualmente a tutte le civiltà del Mediterraneo, la procedura di cottura o laterizzazione (nota 1.2) dell'argilla presso gli antichi romani prese il sopravvento soltanto durante l'impero di Augusto, con un uso massiccio di tale materiale che consentì loro di affrancarsi dalla disponibilità della pietra, la quale rimase limitata all'uso dei marmi pregiati provenienti non solo dalle cave di Carrara ma anche dall'Africa e dalla Grecia.

I risultati non si fecero attendere, con opere come il Colosseo che fu eretto fondando, su una solida piastra in calcestruzzo, muri in mattoni cotti con rivestimento in marmi pregiati. Un ampio uso di materiali naturali e artificiali e dove l'uso dell'arco raggiunse la sua sublimazione, con tre ordini di arcate sovrapposte a realizzare una struttura imponente e snella nel contempo (fig. 1.3).

L'arco, che affonda le sue radici nell'antichità, costituisce il miglior compromesso tra la necessità di realizzare ampi spazi aperti, il dover trasferire a terra grandi carichi e il poter utilizzare materiali quali la pietra ed i mattoni notoriamente poco resistenti a trazione. E di fatti gli archi devono la propria geometria curva alla possibilità di trasmettere carichi verticali attraverso lo sviluppo di sole forze di compressione tra i singoli blocchi semplicemente accostati che li compongono, o tra i singoli mattoni legati con sottili ricorsi di malta legante.

1.2.1 Funzionamento statico

Il funzionamento statico dell'arco è dovuto alla possibilità di poter contenere i carichi verticali all'interno del terzo medio della propria sezione resistente, il che comporta lo sviluppo di soli carichi di compressione, dovuti al peso proprio e ai carichi permanenti; e tali carichi in genere vengono trasmessi direttamente a terra o a pilastri e/o muri mediante una

connessione realizzata tramite l'utilizzo di vincoli idonei, che in linea di massima possiamo schematizzare con l'adozione di appoggi semplici ma che in realtà, come vedremo nel capitolo 7, possono essere anche più complessi. Inoltre, vantaggio costruttivo di non trascurabile importanza, la sua realizzazione richiede solo blocchi accostati con un funzionamento ad incastro dovuto proprio alla trasmissione dei carichi di compressione laddove il blocco centrale, definito chiave, riveste il ruolo principale. Anche se l'immagine che abbiamo degli archi è di grande robustezza e resistenza, in effetti la forma più usuale a semicerchio non è la più indicata, dal momento che non rispetta pienamente il concetto appena espresso, richiedendo di conseguenza grandi sezioni e notevoli quantità di materiale, un problema che portò gli antichi a sviluppare nel corso dei secoli archi con forme diverse. Ciò è avvenuto dal momento che gli archi soffrono sostanzialmente di due limitazioni, legate alla necessità di sopportare solo carichi distribuiti e alla tipologia dei vincoli alla base.

In effetti nel primo caso la presenza di carichi concentrati di notevole intensità può causare pericolose flessioni e potenziali collassi, a meno che l'arco non sia stato appositamente progettato. Ma nel momento in cui l'arco è circondato da murature i problemi legati ai carichi concentrati risultano essere trascurabili, poiché la muratura sovrastante contribuisce alla distribuzione di tali carichi e quella laterale impedisce di fatto eventuali cambiamenti di forma. Ciò implica quindi che un arco, correttamente progettato, può sorreggere un numero ragionevolmente vario di condizioni di carico senza collassare ma anche che può trasmettere forze non correttamente centrate nel terzo medio.

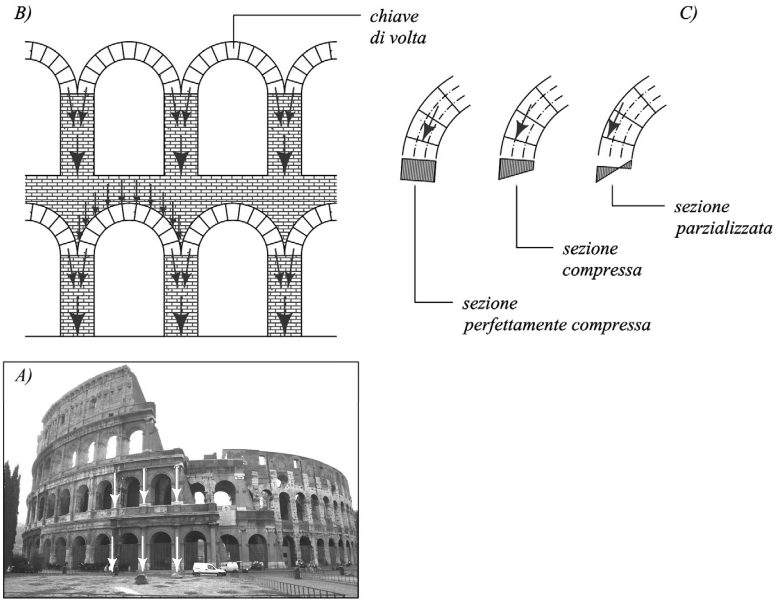

Figura 1.3 A) Il Colosseo rappresentò per l'antica Roma la sublimazione dell'uso dell'arco compresso, con tre ordini di arcate sovrapposte capaci di trasmettere solo sforzi di compressione. B) Schema di funzionamento statico dell'arco compresso, con i percorsi tensionali e le differenti modalità di trasmissione dei carichi ai terreni. C) Tipologie di distribuzione delle tensioni nella sezione dell'arco in relazione alla posizione del carico rispetto al terzo medio.

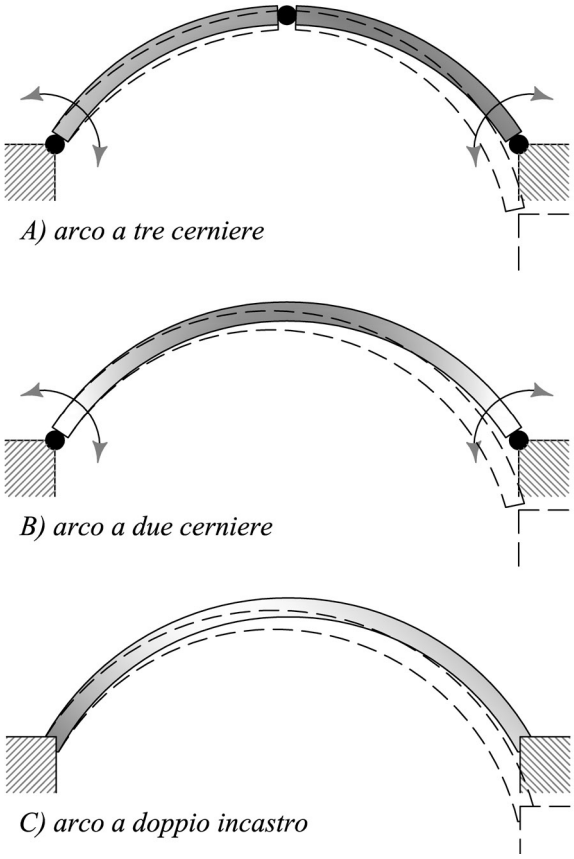

Figura 1.4 La funzione strutturale svolta dai differenti tipi di vincolo, adottabili nella costruzione degli archi, influisce sul comportamento degli stessi in termini di sensibilità ai cedimenti vincolari e agli stati di coazione; ciò comporta che, con il passaggio dagli archi a tre cerniere (A) a quelli a due cerniere (B) e infine a quelli incastrati (C), assistiamo ad un aumento della rigidezza e della sensibilità ai cedimenti.

Tale condizione ovviamente comporta lo sviluppo di reazioni vincolari (nota 1.3) oblique, ovvero dotate di componenti sia verticali che orizzontali, in relazione a varie tipologie di distribuzione delle tensioni interne, fino al caso limite di sezione parzializzata dovuta alla concomitante azione della compressione e della trazione. E di conseguenza, in funzione dell'intensità e dell'orientamento del carico trasmesso, gli archi vengono progettati con vincoli diversi ottenendo ovviamente risultati diversi.

1.2.2 Influenza dei vincoli

Il problema sostanziale è che un arco, a meno che non trasmetta solo carichi di compressione, deve necessariamente rispondere a due condizioni strutturali: di equilibrio delle forze orizzontali e verticali e di equilibrio dei momenti flettenti. Ma, come scoprirono gli in-

gegneri del XIX secolo, la seconda condizione si realizza solo se viene adottato un vincolo a cerniera (fig. 1.4), il quale fornisce, nello spazio bidimensionale, due gradi di vincolo (traslazione orizzontale e verticale impedite) ed un grado di libertà (rotazione consentita); in altre parole la cerniera non trasmette momento flettente, un argomento che approfondiremo nel capitolo 7 e che applicheremo in quelli successivi.

La sublimazione di tale sistema costruttivo avvenne nel 1889 con la famosa *Galèrie des Machines* di Parigi costituita da archi a tre cerniere, un sistema ripreso anche per la costruzione della Stazione Centrale di Milano. Il vantaggio dell'adozione di archi a tre cerniere consiste nella possibilità di poter calcolare esattamente le forze verticali e soprattutto orizzontali per mezzo dell'applicazione delle equazioni fondamentali della statica (nota 1.4) e di poter quindi realizzare strutture di ampie dimensione dotate del giusto grado di sicurezza. Inoltre tale tipologia costruttiva risente in modesta misura dei cedimenti vincolari, come per esempio nel caso di abbassamento differenziale delle fondazioni per costipamento del terreno sottostante, dal momento che le due parti di arco possono ruotare consentendo alla struttura di cambiare forma senza collassare.

È anche vero però che la presenza delle cerniere riduce la rigidezza globale dell'arco aumentandone nel contempo la deformabilità, un problema che, in ogni caso, coinvolge qualunque tipologia di struttura e che comporta una buona dose di sensibilità del progettista. In effetti il problema non è banale, dal momento che la sostituzione delle cerniere con incastri determina un comportamento dell'arco molto diverso. Un incastro non consente alcun grado di libertà, poiché risultano vincolate sia le traslazioni che le rotazioni, con la conseguenza che la struttura risulta essere più rigida, meno deformabile, ma anche molto più sensibile a qualsiasi tipo di cedimento differenziale delle fondazioni. In assenza di cerniere, ogni piccolo spostamento non consente all'arco di inflettersi liberamente e ciò comporta lo sviluppo di momenti flettenti i cui effetti possono essere disastrosi.

1.3 Volte e cupole

Ma se l'evoluzione del sistema trilitico ha condotto alle moderne strutture intelaiate, l'arco ha seguito nei secoli due strade diverse entrambe basate sul concetto di estensione spaziale: la prima ha condotto alla realizzazione delle *volte*, le quali furono inizialmente ottenute per traslazione di un numero elevato di archi accostati, salvo poi sviluppi ed evoluzioni successive di tale concetto; la seconda alla costruzione delle *cupole*, ottenute per rotazione di un arco attorno al proprio asse di simmetria e che appartengono alla categoria delle strutture a guscio, ovvero caratterizzate da una forma curva ed uno spessore sottile se paragonato alle dimensioni complessive.

Ad essere precisi occorre evidenziare come entrambe le strutture, definite resistenti per forma, appartengano alle strutture a guscio, con la differenza che le volte possono essere definite come gusci cilindrici e le cupole come gusci sferici, salvo poi i moderni gusci a paraboloide iperbolico legati soprattutto alla tecnologia del calcestruzzo armato.

1.3.1 Volte a botte

La prima tipologia di volta fu ovviamente la volta a botte (fig. 1.5), così definita proprio per l'analogia morfologica con i noti contenitori, dal momento che essa rappresentò il passaggio più diretto ed immediato dall'arco alla volta ed anche perché può essere considerata come una ripetizione continua dell'elemento base nel senso perpendicolare al piano di giacitura: una semplice traslazione di archi accostati. A prima vista si potrebbe pensare alla

volta a botte come ad una serie di archi giustapposti, ma la continuità strutturale e le dimensioni influenzano notevolmente il suo comportamento; in effetti le strutture ottenute da superfici di traslazione possiedono un comportamento strutturale fortemente dipendente dalle proporzioni relative del guscio e dalle sue condizioni di appoggio, ed il problema può essere ulteriormente complicato se si considera che la figura piana che costituisce la base del cilindro è generalmente un cerchio, ma può essere anche un ellisse, una policentrica o altro.

Posto che un guscio cilindrico può essere definito lungo se la sua dimensione longitudinale è almeno tre volte la luce trasversale, è fondamentale, per una corretta analisi dei quadri fessurativi, riuscire a comprendere il comportamento di una volta a botte. Di fatti nel caso di volte corte e dotate di appoggi laterali continui, la superficie cilindrica si comporta in modo simile ad una serie di archi paralleli (fig. 1.5-C); ma se la superficie può essere considerata rigida, perché realizzata in cemento armato o per la presenza di irrigidimenti trasversali alle estremità, allora il comportamento è assimilabile a quello di una piastra, ovvero si sviluppano sforzi di taglio (nota 1.5) tra le strisce trasversali adiacenti che rappresentano gli archi ideali costituenti la struttura. Un comportamento definibile dualistico, in quanto utile per ripartire anche carichi non uniformi, ma che comporta lo sviluppo di lesioni parallele agli archi qualora venga superata la resistenza a taglio della sezione resistente.

Se la struttura a guscio può essere considerata lunga allora il comportamento differisce sostanzialmente da quello finora descritto: la volta tende a comportarsi come un arco nella direzione trasversale mentre diventa flessibile in quella longitudinale. In altre parole si sviluppa una sorta di flessione longitudinale molto simile a quella delle travi inflesse semplicemente appoggiate, del tipo già descritto nel sistema trilitico. Le modalità di deformazione delle volte lunghe influenzano in pratica la distribuzione delle forze nella struttura, con sforzi di compressione nella direzione longitudinale localizzati nella porzione superiore e sforzi di trazione presenti invece nella porzione inferiore, mentre le lesioni seguono la direzione prevalente sviluppandosi ortogonalmente alla direzione delle tensioni di trazione.

In ogni caso l'esistenza di una volta in un edificio, di qualunque forma essa sia, comporta sempre la presenza di una componente orizzontale nelle reazioni vincolari e quindi fondamentalmente di una spinta verso l'esterno. E tale spinta in genere risulta contrastata da muri di ampio spessore, capaci di trasferire con le proprie masse le forze oblique all'interno della propria impronta di appoggio al terreno. (fig. 1.5-A). Ciò a sua volta implica una distribuzione trapezoidale delle tensioni all'interfaccia muro-terreno o fondazione-terreno, un fenomeno che può comportare lo sviluppo nel tempo di ampi cedimenti accompagnati da moti roto-traslativi: un problema che avremo modo di approfondire nel proseguo del libro. Una valida alternativa consiste invece nella realizzazione di contrafforti, un sistema molto usato nell'antichità già nel primo impianto o come sistema di consolidamento successivo, anche se un esempio descritto nel capitolo 10 dimostrerà non tanto il contrario, quanto la constatazione che non esiste un rimedio univocamente valido.

1.3.2 Volte a crociera

La volta a crociera, molto diffusa negli edifici sette-ottocenteschi, può essere a sua volta considerata come una struttura composta poiché generata da due volte a botte che si intersecano ortogonalmente tra loro. Da un punto di vista della comprensione del comportamento strutturale tale tipologia di volta risulta essere costituita da due archi diagonali che scaricano il peso complessivo sui quattro spigoli e da una struttura portante secondaria rappresentata da quattro unghie cilindriche derivanti dall'intersezione delle volte a botte (fig. 1.6).

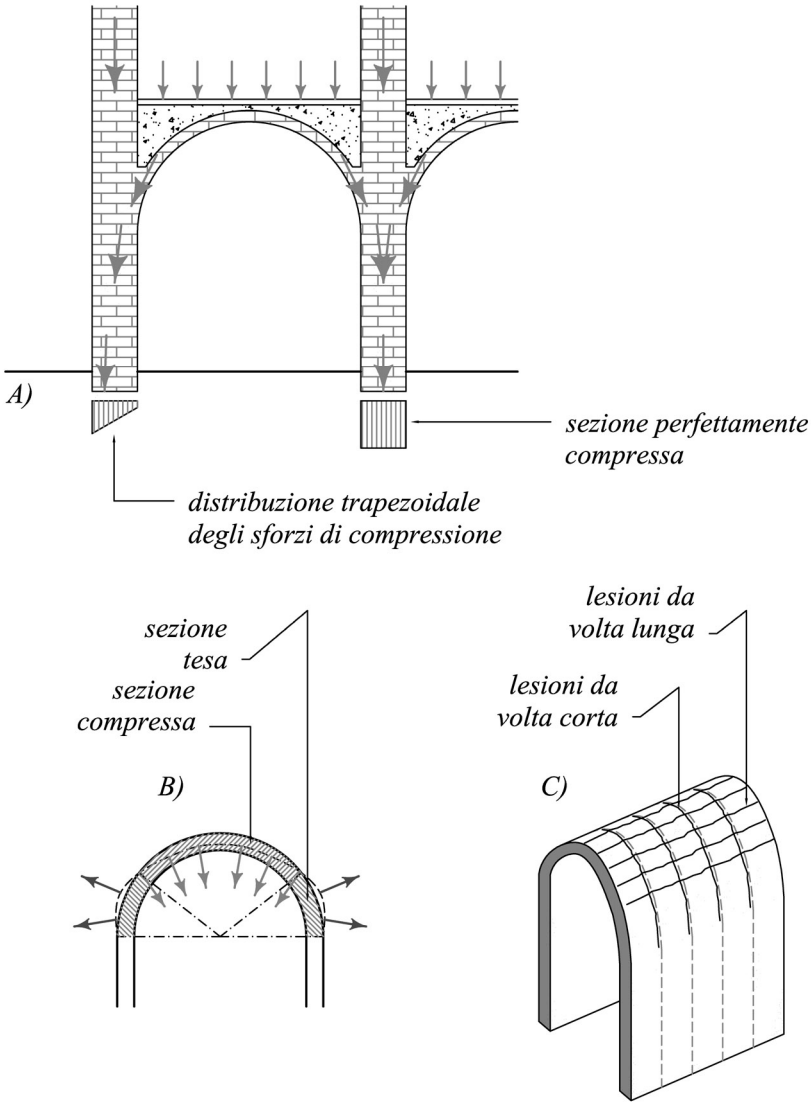

Figura 1.5 A) Schema di funzionamento della volta a botte, la quale può essere pensata come la ripetizione continua dell'arco; B) distribuzione delle tensioni nella sezione della volta a botte in funzione delle modalità di deformazione; C) possibili quadri fessurativi in relazione alle dimensioni geometriche ed al rapporto tra l'ampiezza dell'arco e la lunghezza della volta.

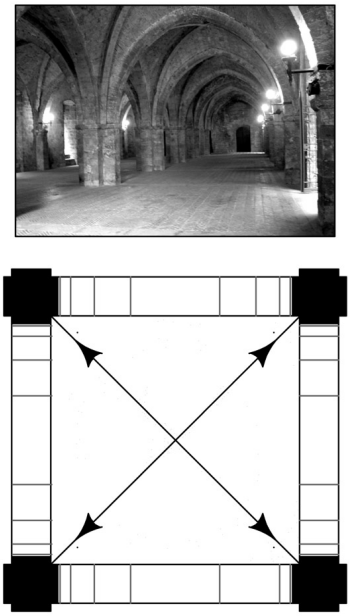

Figura 1.6 La volta a crociera è costituita da due volte a botte che si intersecano con angoli di 90°, mentre il funzionamento statico può essere assimilato a quello di due archi che scaricano i pesi sui quattro pilastri d'angolo. La foto mostra un esempio di volta a crociera derivata dall'uso di archi a sesto acuto.

A loro volta le unghie possono essere immaginate come formate da innumerevoli archi sempre più piccoli spostandosi progressivamente dal perimetro verso il centro e che scaricano il loro peso sugli archi diagonali. Il problema fondamentale di tale tipologia costruttiva è insita nel sistema di trasmissione dei carichi e dei pesi, che vengono convogliati verso i quattro spigoli dove appositi pilastri devono contrastare tutte le componenti, sia orizzontali che verticali, che agiscono quindi secondo la direzione degli archi diagonali. Un sistema che, data anche l'estrema rigidezza, risente molto delle condizioni di vincolo alla base dei pilastri i cui cedimenti palesano una tipologia di lesioni che interessano direttamente la volta e per le quali maggiori approfondimenti saranno forniti nei capitoli 7 e 8.

Anche la volta a padiglione, come la precedente, è una struttura composta, ma con la differenza che il padiglione è costituito da quattro fusi o porzioni di volte a botte ortogonali ed intersecati. Differisce però nel comportamento statico, dal momento che la ripartizione dei carichi e dei pesi avviene in maniera uniforme sull'intero perimetro, richiedendo di conseguenza un valido sistema di contrasto delle spinte, generalmente fornito dalle masse murarie perimetrali talora coadiuvate dalla presenza di catene orizzontali.

1.3.3 Analisi concettuale delle volte

Ma perché è importante comprendere il comportamento statico delle diverse tipologie di volte? Innanzitutto perché gran parte del patrimonio edilizio italiano è medievale, un periodo caratterizzato dall'evoluzione e diffusione delle volte; poi perché non sono state poche le volte che, in qualità di consulente tecnico, ho dovuto discutere con progettisti e di-

rettori di lavori di interventi di consolidamento di strutture, per manifesti cedimenti delle fondazioni, che erano stati basati sull'esecuzione di micropali posizionati sull'intero perimetro: solo che le volte erano del tipo a crociera. Non solo uno spreco economico, ma anche un possibile errore nell'analisi dei carichi che risultano concentrati solo sui pilastri d'angolo, anche in presenza di murature di tamponatura, del medesimo spessore dei pilastri, le quali vengono pertanto scambiate per strutture portanti. La presenza di lesioni al contatto superiore tra la muratura e la volta deve essere chiaro indice di uno "scollamento" tra le due masse, dove solo la seconda membratura svolge un ruolo strutturale.

Ovviamente l'uomo, nella sua infinita capacità di sintesi, ha progettato e realizzato anche altri tipi di volte come per esempio la volta a bacino, determinata geometricamente dalla rotazione di un arco intorno al proprio asse verticale e che per tale motivo è assimilabile ad una cupola, o la volta a vela derivata dalla intersezione di un bacino con un prisma retto. In entrambi i casi si assiste ad una trasmissione dei carichi e dei pesi continua lungo l'intero perimetro.

Quindi la conoscenza delle diverse tipologie di volte consente già durante il primo sopralluogo, che amo definire di "presa visione dei luoghi", di comprendere il comportamento strutturale d'insieme, un comportamento che può essere successivamente approfondito in funzione dello studio dei quadri fessurativi, i quali assumono di conseguenza una connessione profonda con il campo di forze e di sforzi agenti, un concetto sconosciuto fino a duecento anni or sono, ma che ha consentito in pochi decenni la nascita della moderna Scienza delle Costruzioni.

1.3.4 Schema statico delle cupole

E le cupole? Anche se l'argomento sarà approfondito nel capitolo 9 con la trattazione della Cattedrale di Santa Maria del Fiore di Firenze, occorre introdurre il comportamento dei gusci sferici altresì definibili come superfici di rivoluzione a doppia curvatura. In effetti, proprio per la loro particolare conformazione, le cupole non possono essere assimilate nel comportamento agli archi dai quali derivano, rappresentando di fatto una struttura spaziale nella quale è presente un doppio stato di sforzo, dal momento che possono essere idealmente suddivise in meridiani e paralleli con una evidente analogia con il reticolo terrestre.

Così, mentre negli archi è presente solo uno stato di sforzo di compressione diretto secondo il meridiano, nelle cupole gli stati di sforzo sono di compressione lungo i meridiani e di compressione e trazione lungo i paralleli, in funzione delle modalità di deformazione. Questo particolare secondo stato di sforzo è necessario per garantire l'equilibrio statico delle cupole nei confronti della distribuzione delle forze e dei carichi esterni, anche se nel contempo la compresenza di sforzi di compressione e di trazione rende le cupole particolarmente vulnerabili in dipendenza dei materiali da costruzione utilizzati, con particolare riferimento alla pietra ed ai mattoni; con l'unica eccezione del Pantheon, un capolavoro dell'antica Roma che avremo il piacere di studiare nel capitolo seguente.

Per meglio materializzare il concetto di funzionamento di una cupola è necessario riferirsi alla fig. 1.7, dove la modalità di deformazione della stessa indica chiaramente l'orientamento dei diversi stati di sforzo compresenti. I carichi applicati alle superfici a guscio vengono trasmessi direttamente a terra o a strutture portanti perimetrali mediante lo sviluppo di sollecitazioni di compressione, trazione e sforzi tangenziali alle calotte contenuti nei piani tangente.

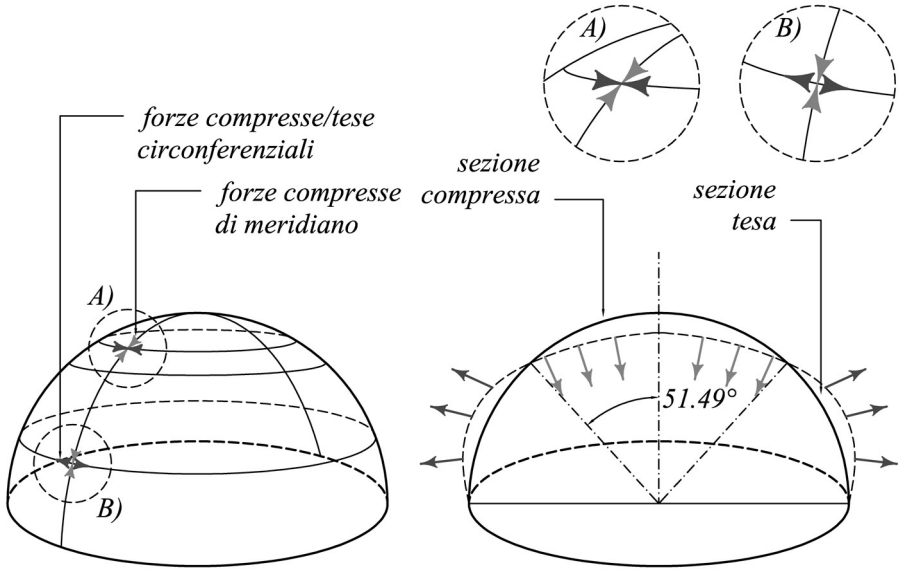

Figura 1.7 Analisi del comportamento statico delle cupole: le spiegazioni nel testo.

E, come accade per gli archi, anche le cupole risultano generalmente inadatte al sostentamento di carichi concentrati, essendo viceversa decisamente adeguate ed efficienti per i carichi distribuiti.

Sotto una condizione di carico normale, intendendo con tale termine la presenza di soli carichi distribuiti, la deformazione comporta che la porzione superiore della calotta tenda a subire un abbassamento, risultando di conseguenza compressa lungo i paralleli, oltre che lungo i meridiani; viceversa la porzione inferiore, per un effetto compensativo, subisce un aumento di volume accompagnato dallo sviluppo di uno stato di sforzo tensile parallelo e sempre di compressione nei meridiani. La distribuzione delle forze in una cupola semisferica può essere agevolmente calcolata ed i risultati hanno dimostrato che esiste un parallelo di demarcazione tra gli sforzi di compressione e quelli di trazione posto in corrispondenza dell'angolo di 51°49' misurato rispetto all'asse verticale.

La coesistenza di due stati di sforzo agenti in direzioni mutualmente ortogonali conferisce alle cupole un comportamento simile ad una piastra, con presenza di sforzi di taglio che agiscono lungo le ipotetiche linee di separazione degli archi ideali costituenti il guscio sferico. Le forze di compressione e trazione che agiscono lungo i paralleli vengono tecnicamente definite come forze circonferenziali, con riferimento alla ovvia funzione di cerchiatura capace di incrementale l'efficienza strutturale della cupola rispetto a quella dell'arco da cui deriva. Tale efficienza migliorata dipende dal fatto che le forze di cerchiatura impediscono, o comunque limitano, l'inflessione degli archi immaginari della cupola, consentendo alla stessa di sostenere carichi maggiori su luci maggiori e con deflessioni minori. Tutto ciò ovviamente in presenza di adeguate condizioni di vincolo alla base capaci di contenere gli sforzi di trazione.

In effetti l'efficienza di un cupola è tutta incentrata sulla possibilità di sviluppare sforzi di trazione lungo i paralleli nella porzione inferiore, a condizione che l'entità di tali sforzi sia tale da non mettere in crisi il materiale utilizzato nella costruzione, con la conseguenza che un guscio sferico, se correttamente progettato, costituisce una struttura molto rigida.

Ma è proprio tale elevata rigidezza che rende nel contempo le cupole particolarmente sensibili a cedimenti differenziali dei terreni ed alle sollecitazioni sismiche. Così, in maniera analoga alla presenza delle catene negli archi con lo scopo di compensare le forze orizzontali, nella progettazione delle cupole è necessario prevedere la realizzazione di un anello basale resistente a trazione, capace di assorbire le forze circonferenziali tensili, un problema che assilla molte delle cupole storiche del nostro passato.

1.4 Nascita della Scienza delle Costruzioni

La storia edificatoria europea è rimasta sostanzialmente invariata per molti secoli, tutta incentrata sull'uso di mattoni e pietra e sulla costruzione di strutture basate su pochi elementi semplici quali travi, pilastri ed archi ed elementi composti quali solai, setti murari e cupole; mentre il modo di assemblaggio non forniva alcuna variante sul tema, dal momento che, forte di secoli di collaudi, l'esperienza prevaleva sulla teoria.

Ma intorno alla prima metà del XIX secolo la progettazione delle strutture fu investita da una vera e propria rivoluzione, quale conseguenza di un processo innescato a partire dal XVII secolo che vide fiorire una nuova filosofia sperimentale e che provocò nei tre secoli successivi la nascita di discipline specifiche. Ciò consentì innanzitutto la definizione del concetto di *struttura* la quale finalmente poteva essere descritta come un assemblaggio di materiali destinati a sorreggere dei carichi e la parola chiave nella comprensione del loro comportamento fu *efficienza*. Nel contempo si assistette anche alla diffusione di nuovi materiali da costruzione, quali l'acciaio e la ghisa da un lato e il calcestruzzo armato dall'altro che assunsero ben presto un ruolo chiave, grazie anche all'affinamento dei processi produttivi che consentirono loro una rapida espansione e una pressoché illimitata disponibilità.

Fino ad allora la conoscenza delle metodologie di costruzione delle strutture e l'uso dei materiali era stato per secoli appannaggio esclusivo delle corporazioni di artigiani; di conseguenza le applicazioni teoriche basate sulla conoscenza della resistenza dei materiali e sul comportamento sotto carico delle strutture può essere invece considerato relativamente recente se paragonato alle piramidi d'Egitto, al Partenone di Atene, al Colosseo di Roma e alla moltitudine di monumenti dell'antichità.

Purtroppo, se è vero che la costruzione di strutture in fango, legno, pietra e mattoni risale alla notte dei tempi, l'evoluzione nel campo delle strutture e della scienza dei materiali è stata fortemente rallentata da due fattori che troppo spesso si sono ostacolati vicendevolmente: la difficoltà degli uomini nell'accettare le innovazioni e i progressi della matematica che ha acquisito piena titolarità come scienza di base, pura ed applicata, solo negli ultimi tre secoli.

In effetti il primo vero scienziato ad interessarsi di problemi relativi alla resistenza dei materiali fu il grande Leonardo da Vinci, il quale sottopose alcune funi a condizioni di trazione mediante l'applicazione di secchielli riempiti di sabbia, con lo scopo di determinarne il carico limite di rottura.

Ma il padre indiscusso della moderna scienza dello studio della resistenza dei materiali e del comportamento delle strutture fu Galileo Galilei che nel 1594 scrisse il suo famoso trattato *Della scienza meccanica* e nel 1638 i ben noti *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, nei quali affrontò per la prima volta anche il problema della flessione in una trave a mensola incastrata e soggetta a carico di punta. Tutto ciò senza poter conoscere il terzo principio di Newton, scoperto alcuni decenni più tardi, che recita che *ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria*, una affermazione tanto banalizzata nel lessico moderno da indurci ad ignorare la sua origine nonché la sua fonda-

mentale importanza nella progettazione strutturale, non solo di edifici, ma anche di macchine di qualunque genere.

1.4.1 La legge di Hooke

Ma se a Newton dobbiamo la scoperta di alcuni principi fisici, astronomici e matematici fondamentali è all'inglese **Robert Hooke**, suo contemporaneo, che va il merito di aver scoperto l'essenza stessa della resistenza dei materiali: il comportamento elastico.

Nato nel 1635 a Freshwater, nell'isola di Wight, Robert Hooke fu uno dei più brillanti e versatili scienziati inglesi del XVII secolo. Pur senza conseguire la laurea frequentò l'Università di Oxford dove entrò in contatto con un gruppo di studiosi, tra i quali Robert Boyle (1627-1691), che in seguito avrebbe costituito il primo nucleo della Royal Society. Fu uno scienziato veramente eclettico e versatile, inventore e costruttore di strumenti scientifici e che formulò, tra l'altro, la prima teoria sulla natura ondulatoria della luce che enunciò articolatamente nel trattato del 1665, *Micrographia*, lo stesso anno in cui fu chiamato a ricoprire la cattedra di geometria al Gresham College di Londra. Assistente di Boyle dal 1657 al 1662, costruì una versione perfezionata della pompa pneumatica di Otto von Guericke (1602-1686), poi descritta da Boyle stesso nei *New Experiments Physico-Mechanical* del 1660. Mediante un'ingegnosa serie di prove sperimentali condotte con questo strumento, Boyle e Hooke dimostrarono l'impossibilità della propagazione del suono nel vuoto ed infine che l'aria era caratterizzata da una permanente elasticità. Nel 1676 giunse alla formulazione della legge di proporzionalità fra le deformazioni elastiche dei corpi e gli sforzi a cui questi sono sottoposti, nota come "legge di Hooke", mentre è altrettanto noto per aver coniato per la prima volta il termine di cellula dopo lo studio di una sottile lamina di sughero con l'utilizzo di un microscopio di sua invenzione. Morì nel 1702 dopo aver compiuto anche importanti osservazioni sugli anelli di Saturno, su Giove, sulle macchie solari e sulle comete. Hooke, avvalendosi di materiali di fortuna, come molle, cavi e travi di legno, sottopose gli stessi a varie condizioni di carico, misurandone la variazione di lunghezza e graficizzando i risultati in un diagramma cartesiano (fig. 1.8).

E la scoperta a cui giunse contiene concetti fondamentali che vengono tutt'oggi utilizzati nella progettazione di qualunque struttura, che sia la pila di un ponte o l'albero di una nave a vela. In effetti egli scoprì che esiste una relazione biunivoca proporzionale tra l'applicazione di un carico e la variazione dimensionale di una struttura, tale da apparire nel grafico come una linea retta; inoltre che la rimozione del carico, se non viene superato un certo limite definito di snervamento del materiale (punto "S" della fig. 1.8), induce il recupero totale della deformazione subita. E Hooke sintetizzò la sua scoperta con la famosa frase *Ut tensio, sic vis*, ovvero la forza è proporzionale all'allungamento. Ciò significa che se un solido viene sottoposto a carichi assiali di trazione o compressione allora subisce un accorciamento o un allungamento proporzionale al carico stesso ed inoltre alla rimozione di quest'ultimo riacquista la propria dimensione originale.

Che tale fenomeno possa essere ben spiegato in termini di legami interatomici è noto solo dal 1941 e ciò non fa che accrescere la grandiosità della scoperta di Hooke.

Oggi sappiamo che la maggior parte dei materiali si comporta come previsto dalla legge di Hooke, mentre se ne discostano sensibilmente i metalli duttili come l'acciaio dolce che obbedisce ad essa solo per carichi modesti. Viceversa materiali compositi co-

me il calcestruzzo armato manifestano un comportamento tipicamente fragile, ovvero (quasi)elastico fino alle condizioni di rottura che avvengono in maniera repentina e incontrollabile.

1.4.2 L'analisi di Cauchy dello stato di sforzo

Durante il secolo successivo coloro, pochi per la verità, che seguirono le orme di Hooke utilizzarono invero un approccio sbagliato dal momento che si occuparono di studiare il comportamento elastico ignorando l'influenza della geometria strutturale e quella più importante esercitata dal materiale usato. In altre parole erano più interessati a comprendere il comportamento d'insieme rispetto alle condizioni esistenti all'interno dei solidi. E ciò non fece che rallentare il processo conoscitivo almeno fino all'enunciazione dei concetti di sforzo e deformazione nella giusta veste matematica grazie agli studi di uno scienziato figlio involontario della Rivoluzione Francese: **Augustin Cauchy**. A lui dobbiamo l'analisi della tensione o pressione, intese come rapporto tra la forza applicata e l'area sulla quale agisce, che forse più di ogni altro argomento ha permesso la nascita e l'evoluzione di una disciplina moderna, la Scienza delle Costruzioni, propedeutica al calcolo strutturale. Più semplicemente lo sforzo secondo Cauchy è dato da:

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1.1}$$

dove P, A e σ rappresentano rispettivamente il carico applicato, l'area sul quale agisce e lo sforzo prodotto (tensione o pressione), definibile quindi come forza per unità di area.

A.L.Cauchy nacque a Parigi il 21 agosto 1789 da una famiglia della media società che fu in grado di garantirgli una vita decorosa anche se non ricca. Dopo una breve parentesi a Arcueil e passata la Rivoluzione Francese la famiglia Cauchy tornò a Parigi dove il padre fu nominato archivista al senato, circostanza che consentì ad Augustin di iscriversi a 15 anni all'Ecole Polytechnique dalla quale uscì nel 1809 con il grado d'ingegnere. Nel 1811 pubblicò le sue prime tre memorie scientifiche, nelle quali si occupò anche di studi sugli integrali doppi; ma con il lavoro del 1816 sulla propagazione delle onde ottenne la consacrazione definitiva dal mondo accademico che gli tributò il gran premio di matematica; lo stesso anno divenne prima membro dell'Accademia delle scienze e poi professore di analisi nella stessa scuola nella quale si era formato. Deposta la casa di Borbone in seguito alla rivoluzione del 1830 Cauchy rifiutò di prestare giuramento al nuovo regime e ciò gli costò la perdita della cattedra che lo costrinse ad un esilio di otto anni. Durante tale periodo accettò, nel 1832, l'invito di Re Carlo Alberto di recarsi a Torino a coprire la cattedra di fisica sublime per poi trasferirsi a Praga l'anno successivo su richiesta del re Carlo X. Nel 1848 tornò infine a Parigi ad occupare la cattedra da lui lasciata vacante, ma solo dopo l'ottenuta dispensa dai giuramenti al regime.

La sua opera è copiosa estendendosi a tutti i rami della matematica pura ed applicata, con un numero tale di libri e memorie da essere secondo soltanto ad Euler. Ma se è noto il suo teorema sulle modalità di distribuzione degli sforzi nell'intorno di un punto materiale, a lui dobbiamo anche le moderne equazioni della teoria dell'elasticità, teoria che egli riuscì a liberare dall'ipotesi delle azioni a distanza e che estese anche ai corpi anisotropi, cioè quei corpi che si comportano diversamente nelle varie direzioni. Morì a Sceaux il 23 maggio 1857.

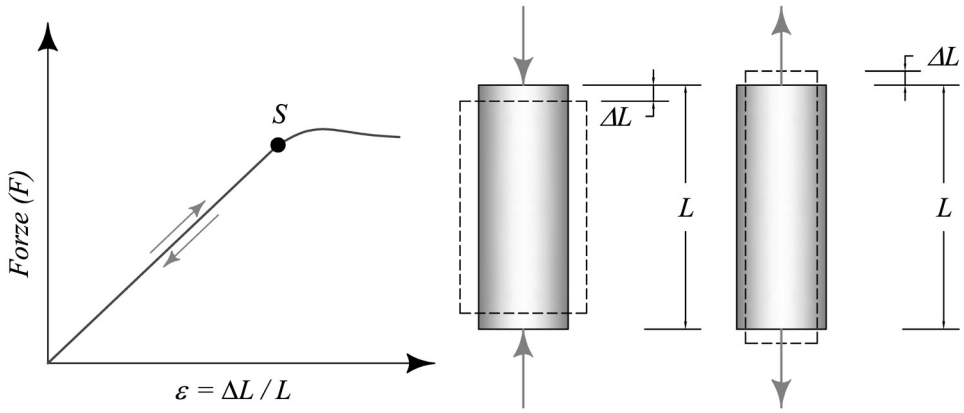

Figura 1.8 Relazioni elastiche esistenti tra le forze applicate ad un provino cilindrico e le relative deformazioni, che conducono alla individuazione di una curva forze-deformazioni tipica per ogni materiale; il punto *S* sulla curva individua la soglia elastica, oltre la quale il comportamento del materiale non può più essere descritto in campo elastico palesando deformazioni plastiche, ovvero irreversibili, fino alla rottura.

Il concetto di tensione fu inizialmente utilizzato, seppur implicitamente, proprio da Galileo Galilei che nell'analisi della trave inflessa considerò la resistenza della stessa come somma di singole resistenze di tutti i suoi elementi o fibre. Nel periodo intercorrente tra Galilei e Cauchy l'evoluzione del concetto di tensione passò inevitabilmente per gli studi sulle travi inflesse condotti separatamente da Leibniz, Euler e Beornulli, ma fu solo con Parent (1666-1716) e Coulomb (1736-1806) che raggiunse la piena maturità concettuale, anche se limitatamente alla definizione moderna di stato piano di tensione. In effetti Parent ammetteva, come i suoi predecessori, una distribuzione lineare delle forze sulla sezione di incastro comprendendo però che le fibre inferiori della mensola erano compresse mentre quelle superiori erano tese, un concetto che approfondiremo alla fine del capitolo quando saremo in possesso di tutte le informazioni necessarie. Inoltre nell'analisi delle tensioni in una trave elastica rettangolare utilizzò esplicitamente il termine di tensione come grandezza fisica, giungendo alla conclusione che gli sforzi di trazione all'estremità superiore dovevano uguagliare quelli di compressione presenti all'estremità inferiore.

Ma colui che contribuì maggiormente a chiarire il concetto di tensione negli elementi inflessi, dal momento che era già noto negli studi sulla pressione idrostatica nei fluidi, fu Charles Augustin Coulomb in un suo lavoro del 1773 dove oltre che ad analizzare la sezione di incastro di una trave inflessa ne studiò anche una sezione intermedia. Ad onor del merito gli studi di Parent e Coulomb sono sostanzialmente equivalenti, ma a quest'ultimo va il merito di aver chiarito alcuni concetti fondamentali, espressi invece in maniera meno chiara dal primo.

Dobbiamo però ancora attendere il 1823 affinché Cauchy pubblichi una memoria dal titolo *Recherches sur l'èquilibre et le mouvement interièur des corps solido ou fluids, èlastiques ou non èlastiques*, dove il concetto di tensione è finalmente introdotto in maniera semplice ed elegante, espresso secondo il suo significato moderno. Non solo: nelle memorie successive riuscì ad esprimere il concetto con una veste matematica chiara ed univoca, riconoscendone anche la natura tensoriale. Di fatti egli ipotizzò nei suoi lavori che la ten-

sione in un punto materiale contenuto in una superficie sia indipendente dalla forma della superficie stessa e dipenda invece solo dalla normale ad essa, consentendogli di sostituire la superficie reale con una superficie piana. L'introduzione di tale postulato lo condurrà successivamente a sviluppare l'idea di stato di sollecitazione in un punto del continuo, nel quale la tensione è completamente sviluppata quando si conoscono le componenti della stessa agenti su tre piani mutualmente ortogonali. Abbiamo raggiunto la piena maturità concettuale e finalmente possediamo anche il giusto formalismo matematico.

L'approccio innovativo di Cauchy consiste nell'aver sviluppato il concetto di sforzo in maniera tale da generalizzarlo e liberarlo dalla costrizione legata ad usi ed applicazioni particolari, come per esempio le travi inflesse. Con Cauchy siamo in grado di studiare qualunque tipologia di struttura comunque caricata, anche l'albero a gomiti di un motore a scoppio, e di determinarne lo stato di tensione in ogni suo punto pensato come un mezzo continuo.

Per meglio comprendere il significato dei concetti espressi da Cauchy consideriamo un corpo di forma generica soggetto all'azione di un campo di forze comunque orientate, utilizzando come riferimento la fig. 1.9.

Per analizzare lo stato tensionale agente su un qualunque punto interno sezioniamo il corpo con una piano parallelo al piano $x\ z$ e concentriamo l'attenzione sul un elemento di area ridotta e di lato ΔA. Le forze agenti su tale elemento di riferimento possono essere raggruppate allora in forze assiali, che agiscono normalmente ad essa, e forze tangenziali, che invece agiscono parallelamente al piano, e che possono essere indicate rispettivamente con ΔF^y e ΔT^y, dove l'apice y denota la normale al piano di riferimento $x\ z$ utilizzato. Ovviamente, mentre la forza normale all'elemento di riferimento ha una direzione univocamente determinata, la forza tangenziale o tagliante può assumere infinite direzioni, tale da richiedere la sua scomposizione in due direzioni di riferimento rispetto agli assi cartesiani x e z, ottenendo le componenti T^y_x e T^y_z.

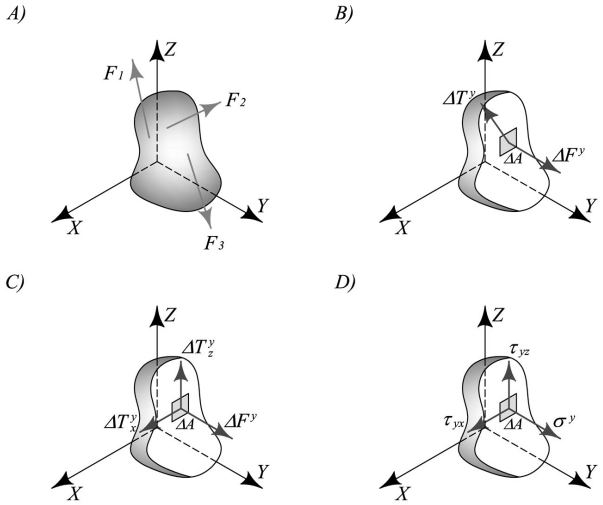

Figura 1.9 Evoluzione dello studio di un campo di forze applicato al mezzo continuo: le spiegazioni sono contenute nel testo.

Ma, utilizzando il concetto di tensione introdotto, sappiamo che lo stato di sforzo agente sul punto materiale considerato può essere definito come il rapporto tra le forze agenti e l'area dell'elemento di riferimento il che richiede che il lato di quest'ultimo sia infinitamente piccolo; espresso in termini di limiti abbiamo che:

$$\sigma_y = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} \tag{1.2.a}$$

$$\tau_{yx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta T_{yx}}{\Delta A} \tag{1.2.b}$$

$$\tau_{yz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta T_{yz}}{\Delta A} \tag{1.2.c}$$

La notazione introdotta implica che il primo pedice sia riferito alla normale al piano, in questo caso y ed il secondo alla direzione delle componenti: x e z. Ovviamente tale metodologia di analisi può essere applicata anche alle sezioni parallele ai piani $y\,z$ con normale parallela all'asse x, e $x\,y$ con normale parallela all'asse z, il che conduce ad identificare le nove componenti dello stato di tensione che applicate ad un cubetto solido di lati d x, d y e d z porta alla costruzione del *tensore degli sforzi* (fig. 1.10):

$$\left[\sigma_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

dove il secondo termine dell'equazione è espresso in notazione matematica mentre il terzo in notazione ingegneristica (notazione di von Karman). L'equazione (1.3) definisce quindi lo stato di sforzo in un punto qualsiasi del mezzo continuo.

Il vantaggio di operare nel continuo fu ben compreso anche da Cauchy, il quale si rese conto che era più vantaggioso che lavorare con la natura molecolare, o corpuscolare secondo la definizione originale, della struttura dei solidi. In effetti ciò a che a noi interessa non sono le proprietà molecolari o atomiche dei solidi bensì le loro proprietà di insieme, il che richiede che il materiale costitutivo sia distribuito con continuità nel volume occupato dal corpo. Il concetto espresso di continuo della materia costituisce il postulato fondamentale della Meccanica dei Continui la quale, come vedremo nel capitolo 4, è alla base anche della Meccanica delle Terre.

Le nove componenti del tensore degli sforzi sono considerate funzione continua delle coordinate del punto in esame, il che implica che sulle fasce opposte del cubetto solido rispetto a quelle visibili nella fig. 1.10 si ha:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x + \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x & \tau_{xy} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x & \tau_{xz} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\mathrm{d}x \\ \tau_{yx} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y & \sigma_y + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y}\mathrm{d}y & \tau_{yz} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\mathrm{d}y \\ \tau_{zx} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z & \tau_{zy} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\mathrm{d}z & \sigma_z + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z}\mathrm{d}z \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

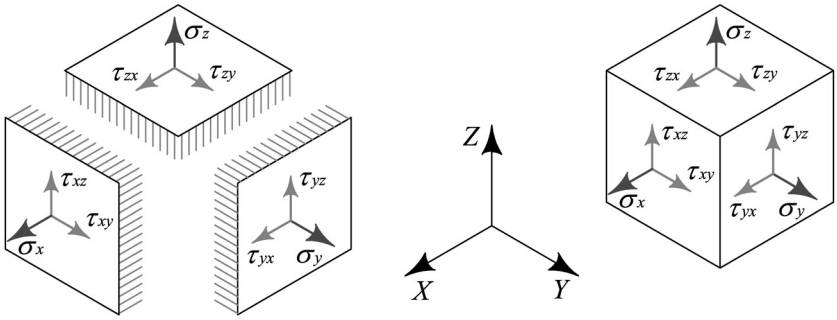

Figura 1.10 Rappresentazione canonica del tensore degli sforzi.

Le condizioni di equilibrio del punto materiale d x d y d z, considerato anche il contributo delle forze di volume, comporta che la somma delle forze nelle tre direzioni x, y e z e la somma dei momenti rispetto ai tre assi debbano essere necessariamente nulle da cui, con un minimo di manipolazione matematica e trascurando le forze di inerzia, otteniamo le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + W_x = 0 \tag{1.5.a}$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + W_y = 0 \tag{1.5.b}$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + W_z = 0 \tag{1.5.c}$$

nelle quali W_x, W_y e W_z rappresentano le forze di volume dipendenti dalla densità del materiale.

Nello stesso tempo devono essere soddisfatte le condizioni di equilibrio alla rotazione che comporta che gli sforzi taglianti siano uguali a coppie:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}\,; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}\,; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \tag{1.6}$$

Da esse deriva che il tensore degli sforzi è simmetrico e che le nove componenti si riducono a sei componenti indipendenti: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}. Le equazioni (1.5), note come *equazioni indefinite di equilibrio* o *equazioni di Cauchy*, non consentono però la risoluzione del problema dal momento che lo stesso risulta essere staticamente indeterminato in funzione dell'esistenza di sei incognite e tre sole equazioni indipendenti: è pertanto necessario introdurre una strategia che consenta di superare l'enpasse matematica che, come vedremo successivamente, comporta l'analisi dello stato di deformazione.

1.4.3 La funzione degli invarianti di tensione

In ogni caso, nell'analisi dello stato di tensione siamo maggiormente interessati a conoscere lo stato di sforzo agente su un piano comunque inclinato rispetto ai tre piani, $x\,y$, $x\,z$, $y\,z$, mutualmente ortogonali precedentemente definiti. Quindi, nel caso di stato tensionale piano, ovvero relazionato ai soli assi coordinati x e y, occorre determinare un metodo di trasformazione delle tensioni tra due sistemi di riferimento x e y e x' e y' ruotati tra di loro di angolo θ.

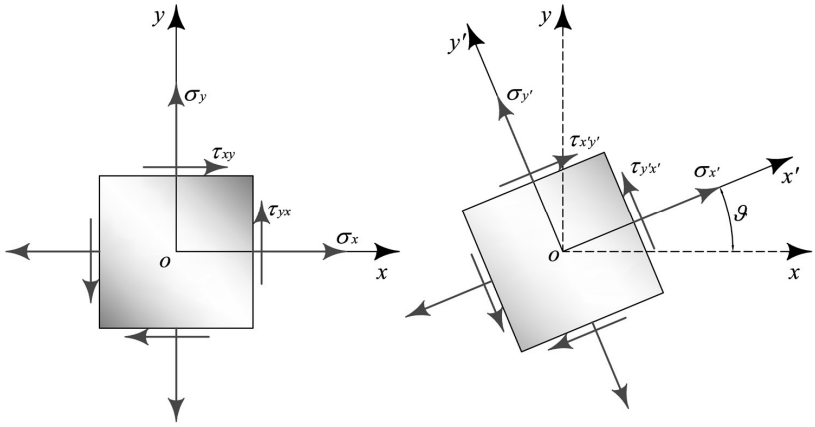

Figura 1.11 Rappresentazione grafica dello stato tensionale bidimensionale; la rotazione degli assi di un angolo ϑ comporta la modifica delle tensioni, le quali possono essere relazionate a quelle di origine mediante l'applicazione di una matrice di trasformazione.

Con riferimento alla fig. 1.11 e imponendo la condizione di equilibrio delle forze nelle direzioni parallele agli assi di traslazione, $\Sigma F_{x'}$ e $\Sigma F_{y'}$, abbiamo che:

$$\sigma_{x'}\Delta A - \sigma_x(\Delta A\cos\theta)\cos\theta - \tau_{xy}(\Delta A\cos\theta)\sin\theta - \sigma_y(\Delta A\sin\theta)\sin\theta -$$

$$+\tau_{xy}(\Delta A\sin\theta)\cos\theta = 0 \tag{1.7a}$$

$$\tau_{x'y'}\Delta A + \sigma_x(\Delta A\cos\theta)\sin\theta - \tau_{xy}(\Delta A\cos\theta)\cos\theta - \sigma_y(\Delta A\sin\theta)\cos\theta -$$

$$+\tau_{xy}(\Delta A\sin\theta)\sin\theta = 0 \tag{1.7b}$$

Risolvendo le equazioni (1.7) in funzione di $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$ otteniamo:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta \tag{1.8a}$$

$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \tag{1.8b}$$

Utilizzando le relazioni trigonometriche:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \tag{1.9a}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \tag{1.9b}$$

con qualche sostituzione e riarrangiando il tutto deduciamo le relazioni cercate:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \tag{1.10a}$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \tag{1.10b}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \tag{1.10c}$$

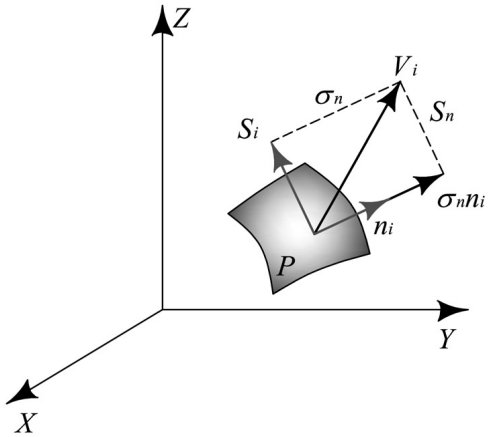

Figura 1.12 Analisi del campo degli sforzi principali nello spazio.

Infine, sommando membro a membro i termini delle equazioni (1.10) ricaviamo anche un concetto fondamentale nell'utilizzo delle rotazioni degli assi:

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y \tag{1.11}$$

La formulazione rappresentata nell'equazione (1.11) indica chiaramente che la somma delle tensioni normali ad un elemento cubico di riferimento è indipendente dall'orientamento dello stesso, ovvero è *invariante*, un concetto estremamente utile per rappresentare lo stato tensionale indipendentemente dal sistema di riferimento.

Il concetto di invarianza conduce alla definizione forse di maggiore importanza nell'analisi dello stato tensionale: quella di *sforzi principali* o *tensioni principali* e dei relativi piani di azione definiti come *piani principali di tensione*.

La definizione formalmente corretta degli sforzi principali implica che dati un punto P e le sei componenti del tensore degli sforzi σ_{ij} ad esso applicato abbiamo che ad ogni direzione n_j è associato un vettore sforzo V_i di componenti normali $\sigma_n n_i$ e di componenti taglianti S_i (fig. 1.12):

$$V_i = \sigma_{ij} n_j \tag{1.12}$$

Vengono definite *direzioni principali degli sforzi* le direzioni per le quali il tensore V_i e n_j sono paralleli, il che comporta l'equivalenza:

$$V_i = \sigma \cdot n_i \tag{1.13}$$

nella quale σ è detto *valore principale dello sforzo*. È un tipico problema agli autovalori per cui sostituendo l'equazione (1.13) alla (1.12) e considerando le identità $n_i = \delta_{ij} n_j$ e $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ otteniamo un set di equazioni che in forma compatta assumono la forma di:

$$\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma\right) \cdot n_j = 0 \tag{1.14}$$

dove δ_{ij} rappresenta il delta di Kronecker, una matrice con le seguenti proprietà:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \cdots se \cdots i \neq j \\ 1 \cdots se \cdots i = j \end{cases} \tag{1.15}$$

L'equazione (1.14) rappresenta tre equazioni omogenee per altrettante direzioni principali e che possiedono soluzione se e solo se il determinante è nullo:

$$\det\left|\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}\right| = 0 \tag{1.16}$$

La soluzione della (1.16) è data dalla seguente equazione caratteristica:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \tag{1.17}$$

nella quale I_1 è la traccia, I_2 è la somma dei cofattori degli elementi diagonali e I_3 è il determinante di σ_{ij}. Le quantità I_1, I_2 e I_3 sono definite *invarianti di primo, secondo e terzo ordine del tensore degli sforzi* e risultano essere indipendenti dalla rotazione degli assi coordinati. Un risultato di notevole importanza. Di fatti, con riferimento alla fig. 1.11 ed in caso di stato tensionale piano, il tensore gli sforzi è dato da:

$$A = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} \tag{1.18}$$

il cui determinante è:

$$\det|A| = (\sigma_x\sigma_y) - (\tau_{xy}\tau_{yx}) \tag{1.19}$$

A questo punto applichiamo una matrice di trasformazione o più propriamente di rotazione tra i due sistemi di riferimento [x, y] e [x',y'] della fig. 1.11:

$$B = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \tag{1.20}$$

il cui determinante, con qualche manipolazione matematica, risulta essere:

$$\det|B| = (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}\tau_{yx})\cos^2\theta + (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}\tau_{yx})\sin^2\theta \tag{1.21}$$

dal quale, utilizzando la relazione trigonometrica:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{1.22}$$

otteniamo l'invarianza dei determinanti:

$$\det|A| = \det|B| \tag{1.23}$$

Per ulteriori approfondimenti si rimanda al capitolo 4 e si consiglia la lettura dell'appendice A.

Per concludere il discorso, il concetto introdotto di sforzi principali massimi può essere sintetizzato nel seguente modo: abbiamo visto che il cubetto solido di riferimento può essere soggetto ad un arbitrario stato di tensione costituito da una combinazione di sei componenti indipendenti: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}; se ruotiamo tale cubetto modificheremo detto stato tensionale e tra gli infiniti orientamenti scopriremo che ne esiste uno per il quale le tensione tangenziali si annullano lasciando agenti le sole tensioni normali, che assumono per le diverse direzioni mutualmente ortogonali i loro maggiori valori.

1.4.4 I cerchi di Mohr

Per meglio chiarire i concetti introdotti ho ritenuto utile proporre un esempio estratto dal libro *Meccanica dei solidi* di F.P. Beer, E. R. Johnston Jr e DeWolf J.T. dove viene considerato un quadrato elementare soggetto ad uno stato di tensione come da fig. 1.13-A.

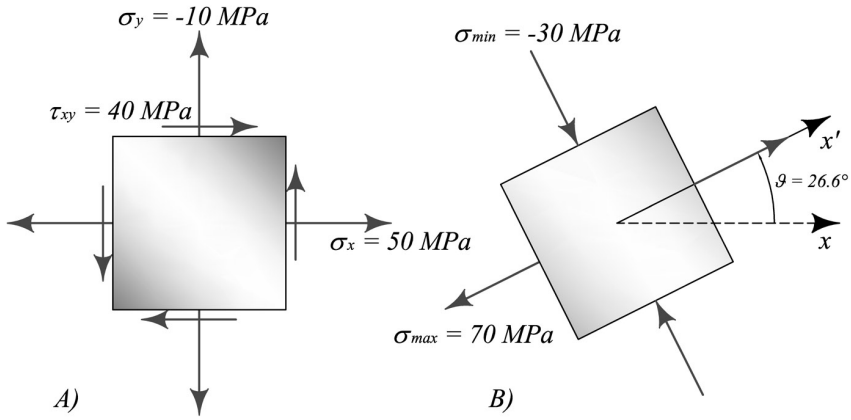

Figura 1.13 Esempio di analisi dello stato tensionale: A) a partire da condizioni date; B) per giungere alla formulazione del campo delle tensioni principali.

Si vogliono determinare:
- *i piani principali;*
- *le tensioni principali;*
- *la massima tensione tangenziale.*

A tal proposito occorre anche premettere che nella Meccanica del Continuo viene adottata la convenzione dei segni tale che i valori sono negativi in compressione e positivi in trazione, positivi per taglio diretto a destra e negativi per taglio diretto a sinistra, da cui le componenti dello stato di sforzo che agisce sul cubetto solido di riferimento sono:

$$\sigma_x = +50\text{MPa} \; ; \quad \sigma_y = -10\text{MPa} \; ; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = +40\text{MPa}$$

Per individuare la direzione dei piani principali occorre innanzitutto notare che le equazioni (1.10) rappresentano le equazioni parametriche di una circonferenza, come scoprì l'ingegnere tedesco Otto Mohr (1835-1918), della quale conosciamo alcuni punti caratteristici (fig. 1.14) quali: la tensione massima $\sigma_{\max} = \sigma_x$ e minima $\sigma_{\min} = \sigma_y$ che individuano l'intersezione della stessa con l'asse della tensione $\sigma_{x'}$ nonché la tensione media σ_{med} che rappresenta il centro della circonferenza:

$$\sigma_{\text{med}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \tag{1.24}$$

Utilizzando come guida la fig. 1.14 siamo in grado, utilizzando il Teorema di Pitagora, di calcolare anche il raggio R della circonferenza:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{1.25}$$

e l'angolo che individua i piani delle direzioni principali:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{1.26}$$

dove θ è l'angolo di rotazione degli assi di cui alla fig. 1.11.

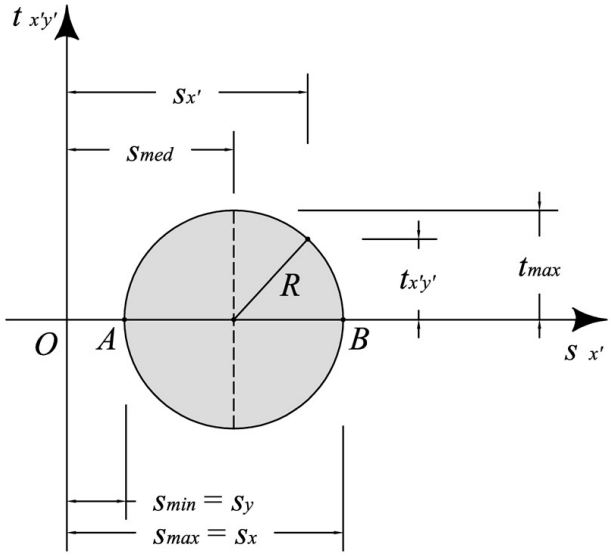

Figura 1.14 Relazioni geometriche esistenti tra lo stato tensionale agente su un piano qualsiasi comunque inclinato e le tensioni principali, interpretate secondo la teoria dei cerchi di Mohr.

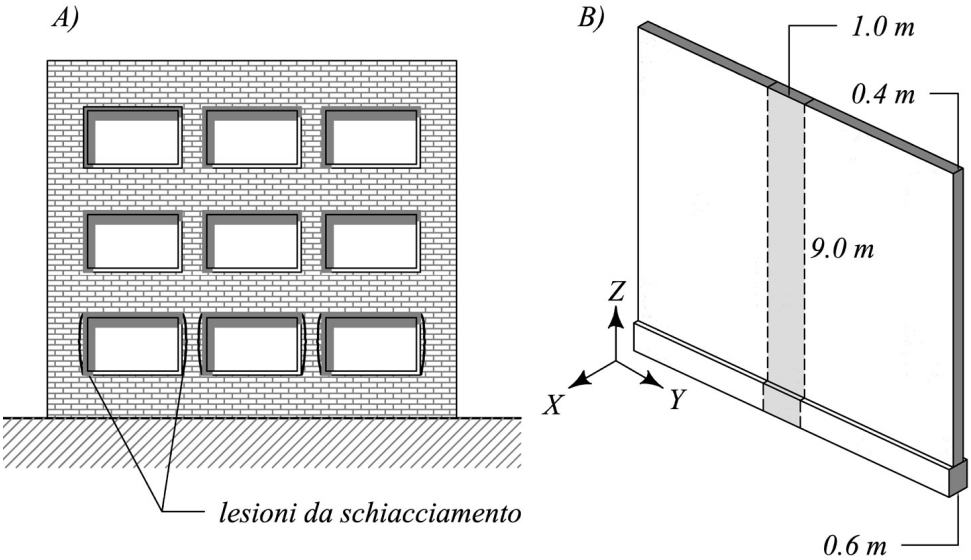

Figura 1.15 A) Parete muraria con presenza di aperture e soggetta ad elevati sforzi di compressione che hanno prodotto la comparsa di lesioni iperparaboloidiche, un argomento che approfondiremo nel capitolo 7. B) Geometria di riferimento per l'analisi dello stato tensionale e la costruzione del quadro isostatico.

Risolvendo l'equazione (1.26) con i valori proposti nell'esercizio otteniamo che i piani principali risultano ruotati di $\theta_{x'} = 26{,}6°$ e $\theta_{y'} = 26{,}6° + 90° = 116{,}6°$.

Per rispondere al secondo quesito occorre utilizzare le equazioni (1.10) ponendo i valori proposti e l'angolo $\theta_{x'}$ calcolato, ottenendo (fig. 1.13-B):

$$\sigma_{x'} = \sigma_{\max} = 70\text{MPa} \; ; \quad \sigma_{y'} = \sigma_{\min} = -30\text{MPa}$$

Per calcolare infine il valore della tensione tangenziale massima, come richiesto al punto "c" dei quesiti, occorre analizzare nel dettaglio la fig. 1.14, dalla quale emerge chiaramente la seguente eguaglianza:

$$\tau_{\max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{1.27}$$

Sostituendo i relativi valori otteniamo un valore $\tau_{\max} = 50$ MPa.

Ora sappiamo che gli assi coordinati x' e y' sono mutualmente ortogonali e dunque le direzioni principali di massima e minima tensione differiscono tra loro di 90°: occorre trovare la direzione della tensione tangenziale massima rispetto ad essi. Utilizziamo l'equazione (1.10c) differenziandola rispetto a θ:

$$\frac{\mathrm{d}\tau_{x'y'}}{\mathrm{d}\theta} = -2\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta - 2\tau_{xy}\sin 2\theta \tag{1.28}$$

Ponendo $\mathrm{d}\tau_{x'y'}/\mathrm{d}\theta = 0$ e dividendo tutti i termini per $\cos\theta$:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + \tau_{xy}\tan 2\theta = 0 \tag{1.29}$$

da cui:

$$\tan 2\theta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \tag{1.30}$$

L'equazione (1.30) deve essere confrontata con l'equazione (1.26); inoltre applicando ad essa i valori proposti nell'esercizio otteniamo un valore di $\theta_{x'} = -18{,}4°$ e quindi una rotazione verso il basso nonchè opposta a quella rappresentata nella fig. 1.13-B; ma l'aspetto di maggiore rilevanza deriva dalla somma degli angoli trovati, tale che 26,6°+18,4 = 45°.

Quindi ora sappiamo che la massima tensione tangenziale agisce sempre su un piano ruotato di 45° rispetto alle direzioni principali massima e minima.

1.4.5 Case history 3

Ma è realmente così importante il concetto di sforzo? Abbiamo già avuto modo di scoprire che lo studio delle strutture in termini di forze non ha prodotto alcuna evoluzione fino all'introduzione del concetto di tensione da parte di Cauchy. Ma per semplificare la comprensione ritengo necessario abbandonare l'approccio fisico-matematico e citare un esempio chiarificatore.

Un giorno del 2004, durante un sopralluogo in qualità di Consulente Tecnico d'Ufficio del Tribunale di Teramo, ebbi modo di sentire un architetto che derideva un ingegnere, tra

l'altro assente, per le conclusioni alle quali era giunto nell'analisi di un quadro fessurativo relativo ad un edificio residenziale. Nella fattispecie l'ingegnere, in qualità di Consulente

Tecnico di Parte del proprietario dell'immobile che aveva citato in giudizio l'impresa costruttrice dello stesso, asseriva che le lesioni, concentrate presso gli stipiti delle finestre del livello inferiore, erano imputabili a fenomeni di schiacciamento della muratura portante (fig. 1.15-A): un argomento che tratteremo in dettaglio nel capitolo 7. Quindi la stessa poteva essere sottodimensionata oppure era affetta da difetti esecutivi, e in questi ultimi era possibile comprendere anche la eventuale pessima qualità dei materiali usati.

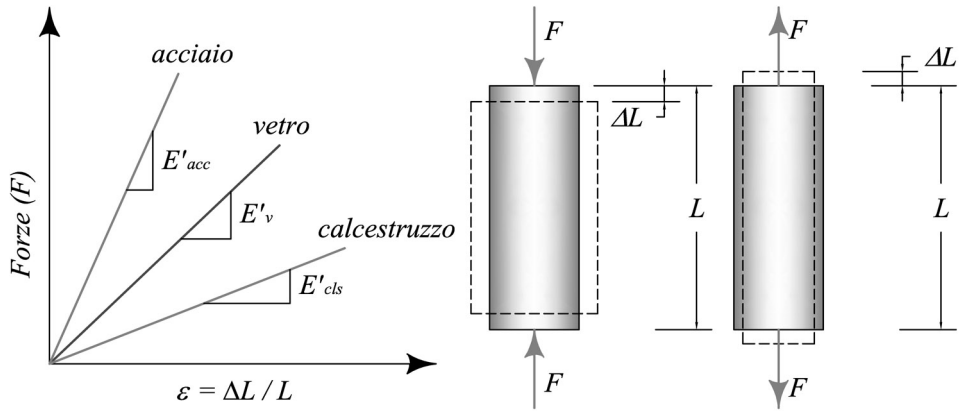

Figura 1.16 Sottoponendo diversi materiali a varie condizioni di sforzo-deformazione Young arrivò a formulare l'esistenza di una costante elastica caratteristica di ognuno di loro, indicata con E', tale che all'aumentare della pendenza della curva (retta) elastica aumenta la rigidezza del materiale e diminuisce la sua deformabilità.

In ogni caso l'architetto negava non tanto le conclusioni dell'ingegnere in merito al caso specifico quanto proprio l'esistenza di tali tipi di problemi! In altre parole secondo egli i fenomeni di schiacciamento in realtà non esistono, negando di fatto l'evidenza sperimentale dell'esistenza, sulla curva sforzi-deformazioni, di un punto di snervamento e di un successivo punto di rottura. E riteneva nel contempo che le lesioni presenti sull'immobile fossero fisiologiche e comunque dipendenti dal naturale assestamento della struttura.

Incuriosito da tali affermazioni chiesi prontamente spiegazioni in merito, con la scusa che per me tutto può essere fonte di insegnamento. Ovviamente evitai di aggiungere che sono soprattutto gli errori altrui ad accrescere il mio bagaglio di esperienza, considerato che un approccio basato sull'apprendimento dai propri errori è del tutto fuori discussione.

E la spiegazione fu immediatamente fornita: secondo l'architetto una muratura portante può essere sostanzialmente considerata come una lastra soggetta a carichi assiali, uniformemente distribuiti e/o concentrati, cosa che fin qui corrispondente sinceramente al vero. Di conseguenza i carichi, da lui espressi in termini di forze, vengono distribuiti procedendo dal punto di applicazione verso il basso in funzione dell'esistenza della forza di gravità: e Newton ringrazia. Alla fine gli stessi raggiungono le fondazioni per poi essere dissipati ai sottostanti terreni: ed è qui che sta l'arcano! Si perché la sua teoria a questo punto prevedeva che i terreni dovessero cedere in funzione dei carichi subiti impedendo di fatto lo

schiacciamento della muratura. Ovvero se la muratura sotto condizioni di carico assiale subisce una traslazione verticale per cedimento del vincolo alla base è impossibile che la stessa possa schiacciarsi!

È ovvio che l'architetto, localmente noto per i suoi lavori di progettazione edile ed urbanistica, non conosceva affatto il concetto di sforzo in quanto forza per unità di area e, per fortuna di tutti, è stato anche l'unico tecnico che ho conosciuto che ignorava i concetti basilari della progettazione strutturale.

Per meglio comprendere l'utilità dell'uso dello sforzo piuttosto che della forza consideriamo una muratura di altezza di 9 metri e spessore di 0,4 metri soggetta a condizioni di carico assiale dipendenti dall'azione del solo peso proprio e supponiamo che il peso per unità di volume della stessa sia di 18 kN/m^3 (fig. 1.15-B).

Per il momento banalizziamo il problema per concentrarci solo sullo schema di funzionamento, per approfondire solo successivamente i concetti che lo sottendono.

In assenza di aperture, quali finestre e porte, la muratura è soggetta ad un carico verticale di compressione uniforme che aumenta costantemente dall'alto verso il basso dove lo sforzo è massimo ed è pari, per una striscia di lunghezza unitaria, alla densità della muratura γ_m = 18 kN/m^3 moltiplicato per il volume. In termini numerici il peso P della struttura è: 18 kN/m^3 × 9 m × 1 m × 0,40 m = 64,8 kN, mentre la tensione alla base deriva dall'applicazione dell'equazione (1.1): 64,8 kN / (1 m × 0,40 m) = 162 kN/m^2, ovvero 162 kPa. Un valore decisamente basso se paragonato al carico di rottura pari in genere pari a circa 10 MPa per una normale muratura di mattoni forati. Quindi un fattore di sicurezza rispetto alla rottura di 61,7 (10.000 kPa / 162 kPa).

In assenza di fondazioni anche le tensioni dissipate sul terreno risultano del medesimo valore e quindi nuovamente di 162 kPa, ma nel momento in cui dotiamo il muro di una fondazione della larghezza di 0,6 m allora le tensioni indotte scendono al valore di 108 kPa: un valore assolutamente compatibile con la resistenza della maggiore parte dei terreni. È ovvio che qualunque terreno, anche il più resistente, subisce comunque un cedimento in funzione delle tensioni a cui risulta assoggettato, ma è anche ovvio che ciò non diminuirà affatto le tensioni esistenti sulla muratura. Inoltre potrebbe essere sufficiente considerare il muro in questione fondato su roccia per avere un vincolo fisso alla base che impedisca la traslazione verticale. In entrambi i casi le tensioni interne alla muratura rimangono invariate.

A questo punto per meglio comprendere il processo e fornire una risposta esauriente all'architetto, occorre introdurre tre nuovi concetti:

1) il calcolo dello stato di tensione in una muratura, ovvero la *diffusione dei carichi* nella stessa;
2) lo studio delle isostatiche di massima e minima tensione;
3) il fenomeno della concentrazione degli sforzi in presenza di aperture nelle murature portanti.

Ciò però conduce ai risultati degli studi condotti da **Thomas Young** (1773-1829) sulla resistenza dei materiali.

1.4.6 La teoria dell'elasticità di Young

Nato nel 1773 da una famiglia di quaccheri di modeste condizioni, Thomas Young dai quattordici ai diciannove anni si guadagnò da vivere lavorando come precettore in una ricca famiglia. Durante questo periodo imparò da autodidatta il latino, il greco, il persiano, il francese, l'italiano, l'ebraico, l'arabo, la matematica e la filosofia. Quindi studiò medicina in tre diverse università, Londra, Edinburgo e Gottinga e nel 1799 aprì il suo studio medico a Londra.

Ma già nel 1794 era diventato membro della Royal Society con un lavoro di ricerca sulla capacità di accomodamento dell'occhio umano. Il suo interesse iniziale era di fatti rivolto allo studio dei sensi e della percezione e fu il primo a comprendere il modo in cui l'occhio mette a fuoco la visione, per poi scoprire successivamente la causa dell'astigmatismo.

In effetti Young verificò che l'accomodamento dell'occhio non è dovuta a cambiamenti nella lunghezza dello stesso o a variazioni nella curvatura della cornea ma alla composizione del cristallino il quale è costituito da un materiale trasparente, elastico e piuttosto flessibile. Esso inoltre, scoprì Young, è governato da un muscolo che lo circonda e che consente di modificarne la distanza focale in maniera tale da consentire la messa a fuoco degli oggetti. Ma la grandiosità della sua scoperta è insita nella variazione di dimensioni del cristallino, che presenta in condizioni di rilassamento muscolare un diametro massimo, uno spessore minimo e una curvatura minima, tale da consentire la messa a fuoco di oggetti collocati all'infinito. Ma quando è necessario osservare oggetti vicini il muscolo viene contratto e il cristallino subisce una contrazione e relativo ispessimento del diametro ed un aumento della curvatura.

Ad onor del vero se Young risultò un brillantissimo scienziato fu nel contempo considerato un pessimo divulgatore, tanto che la sua teoria prese un corpo ed una forma matematica solo grazie agli sforzi di Siméon Denise Poisson (1781-1840), matematico, fisico, astronomo e statistico francese e all'ingegnere francese Claude-Louis-Marie-Henri Navier (1785-1836). Per meglio comprendere il concetto da loro espresso di *rigidezza dei materiali* occorre riferirsi alla fig. 1.16 dove la pendenza della retta sforzi-deformazioni viene comunemente definita come *modulo elastico normale E* o modulo di Young e matematicamente rappresenta il rapporto tra lo sforzo di trazione o compressione applicato σ e la deformazione longitudinale ε_l subita da un corpo solido. Di fatti indicando la deformazione come:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \tag{1.31}$$

si ha:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_l} = \frac{\sigma L}{\Delta L} \tag{1.32}$$

ovvero:

$$\varepsilon_l = \frac{\sigma}{E} \tag{1.33}$$

Evidentemente ogni materiale, per condizioni di sforzo al di sotto della soglia di snervamento, è caratterizzato da un proprio modulo di Young, sicché a titolo di esempio l'acciaio possiede un modulo elastico di 210.000 MPa, da confrontare con i 70.000 MPa del vetro comune ed i 17.000 - 37.000 MPa del calcestruzzo. A questo punto è ovvio che a parità di sforzo applicato ognuno di questi materiali subirà una deformazione longitudinale diversa e per un valore di σ_c = 1000 MPa la stessa risulterà essere pari allo 0,48 % per l'acciaio, dell'1,43 % nel vetro e del 5,88 % nel calcestruzzo. Ovviamente con risultati finali ben diversi!

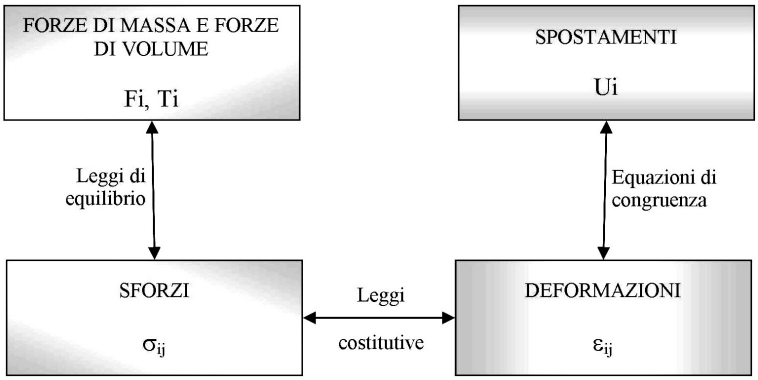

Figura 1.17 Diagramma di flusso utilizzato nell'analisi tensodeformativa dei materiali, a partire dalle equazioni di equilibrio del mezzo continuo ed applicando opportuni legami costitutivi (es. la legge elastica).

Ma dallo studio del cristallino e dalle successive prove di Poisson si è scoperto che l'applicazione di un carico di trazione o compressione induce in un solido non solo una deformazione elastica longitudinale ma anche una deformazione trasversale ε_t che risulterà di dilatazione per la compressione e di restringimento per la trazione (fig. 1.16). E per un solido cilindrico di sezione A si ha:

$$\varepsilon_t = -\nu\varepsilon_l = -\nu\frac{P}{AE} = -\nu\frac{\sigma}{E} \tag{1.34}$$

nella quale ν rappresenta il coefficiente di Poisson che esprime la costante di proporzionalità tra le deformazioni trasversale e longitudinale:

$$-\nu = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l} \tag{1.35}$$

Le equazioni (1.33÷1.35) evidenziano un elemento di fondamentale importanza e cioè ci dicono che se gli sforzi e le deformazioni longitudinali sono di compressione le deformazioni secondarie risultano di trazione e viceversa. Inoltre che maggiore è il coefficiente di Poisson e meglio le deformazioni secondarie riescono a compensare le variazioni di volume, fino al limite superiore di $\nu = 0{,}5$ allorquando teoricamente le due deformazioni si compensano. A titolo di esempio e come valore di riferimento, il coefficiente di Poisson del calcestruzzo generico è di 0,16, da confrontare con il limite inferiore di tale parametro uguale a zero, che corrisponde ad uno stato di deformazioni uniassiale.

Ora, applicando tali concetti al cubetto solido di riferimento, di volume $x\,y\,z$, già utilizzato per l'analisi dello stato tensionale, si ha che ognuna delle sue facce subisce una deformazione tale che la dimensionale finale risulta uguale a $x \pm \mathrm{d}\,x$, $y \pm \mathrm{d}\,y$, $z \pm \mathrm{d}\,z$, dove il segno dipende dalle condizioni di sforzo, positivo per compressione e negativo per trazione per la condizione che:

$$\mathrm{d}x = \varepsilon_x x\,; \quad \mathrm{d}y = \varepsilon_y y\,; \quad \mathrm{d}z = \varepsilon_z z \tag{1.36}$$

in funzione di:

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}x}{x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\mathrm{d}y}{y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\mathrm{d}z}{z} \tag{1.37}$$

La trattazione sopra descritta della teoria della elasticità ci consente quindi di determinare la deformazione elastica ε_{ij} di un punto materiale, che espressa in notazione tensoriale è:

$$\left[\varepsilon_{ij}\right] = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} \sigma_x & -\nu\sigma_y & -\nu\sigma_z \\ -\nu\sigma_x & \sigma_y & -\nu\sigma_z \\ -\nu\sigma_x & -\nu\sigma_y & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{1.38}$$

mentre in forma parametrica conduce a un set di tre equazioni:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \tag{1.39a}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] \tag{1.39b}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \tag{1.39c}$$

Ma applicando lo stesso ragionamento per gli sforzi tangenziali otteniamo, in notazione tensoriale:

$$\gamma_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{G}; \quad i \neq j \tag{1.40}$$

ovvero in forma parametrica:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \tag{1.41}$$

nelle quali G rappresenta il modulo elastico tangenziale o *modulo di rigidezza* il quale è relazionabile al modulo elastico normale tramite la seguente equazione:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.42}$$

Per uno stato tensionale nel piano $y\,z$ le equazioni (1.39÷1.40) si riducono a tre:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\sigma_z\right] \tag{1.43a}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\sigma_y\right] \tag{1.43b}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \tag{1.43c}$$

1.4.7 Problemi elastostatici

Ordunque la corretta soluzione di un problema di meccanica dei solidi tridimensionale richiede la determinazione di 15 incognite: sei componenti di sforzo (σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz});

sei componenti di deformazione (ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}); e tre componenti di spostamento (u, v, w): ovvero è richiesto un set di 15 equazioni. Nel caso di un problema bidimensionale il numero delle incognite scende ad 8: tre componenti di sforzo (σ_x, σ_y, τ_{xy}); tre componenti di deformazione (ε_x, ε_y, γ_{xy}) e due componenti di spostamento (u, v). E in tal caso, con riferimento al diagramma di flusso rappresentato nella fig. 1.17, queste otto incognite possono essere determinate considerando le seguenti condizioni che devono essere soddisfate per un problema che invoca l'elasticità piana:

a) *leggi di equilibrio:* equazioni (1.15) ridotte a tensione piana
b) *relazioni sforzo-deformazioni:* equazioni (1.43)
c) *relazioni sforzi-spostamenti*
d) *equazioni di congruenza*
e) *condizioni al contorno*

Le equazioni di cui al punto "c" occorrono per trasformare le deformazioni, calcolate applicando le leggi costitutive in campo elastico (punto "b"), in spostamenti, e sono:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}\,; \quad \tau_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial u} \tag{1.44}$$

mentre le equazioni di congruenza sono necessarie affinché sia garantita la compatibilità della deformazione con la continuità del sistema materiale, ossia le sue componenti siano tali da assicurare che non di verifichino distacchi o compenetrazioni di materia:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{1.45a}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \tag{1.45b}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \tag{1.45c}$$

Diversamente le funzioni (u, v) non sarebbero più continue ma presenterebbero punti di singolarità: le condizioni al contorno specificano infine i vincoli imposti. Sfortunatamente, tranne che per casi di geometrie e condizioni al contorno semplici, le soluzioni simultanee di queste equazioni differenziali sono difficilmente ottenibili; l'unica possibilità è il ricorso a metodi numerici come le tecniche agli elementi finiti o alle differenze finite e che, per l'enorme mole computazionale, necessitano dell'uso di un calcolatore elettronico.

Ad onor del vero debbo ammettere con tutta sincerità che ho tentato di risolvere con penna e calcolatrice il problema rappresentato in fig. 1.15-B utilizzando la tecnica degli elementi finiti, ma dopo mezza giornata di calcoli, quando ho terminato l'assemblaggio della matrice di rigidezza, mi sono reso conto delle enormi difficoltà computazionali nonostante l'utilizzo di un numero molto limitato di nodi; e anche del perché i calcolatori elettronici e i software dedicati alla meccanica dei solidi siano così utili. In effetti essi riescono a calcolare strutture o comunque solidi di qualunque geometria e complessità, soggetti a condizione di carico e condizioni al contorno comunque variabili, per problemi di statica, dinamica, fluidodinamica, diffusione termica ecc., in campo stazionario e/o transitorio. In poche parole riescono a risolverci la vita. Però è anche vero che hanno consentito a molti tecnici di affacciarsi in un mondo che diversamente sarebbe stato loro precluso. Personal-

mente lavoro anche come consulente sia di amministrazioni pubbliche che di imprese; solo che nel primo caso opero in prima linea, come progettista e direttore dei lavori, mentre nel secondo caso sono addirittura in trincea a scovare le magagne dei lavori appaltati con il bieco scopo di aumentare gli utili dell'impresa. Ricordo con piacere quando una volta mi resi conto che i calcoli geotecnici relativi alla progettazione di una paratia, di sostegno di un fronte di scavo in ambiente urbano, non erano corretti: i grafici dei momenti flettenti e delle deformate per i singoli step di calcolo non corrispondevano al reale comportamento della struttura. All'inizio non riuscivo a capire il perché e fu solo dopo diversi giorni spesi a studiare tutta la documentazione progettuale, centinaia e centinaia di pagine, che mi resi conto che non era stata un'imperizia del progettista, ma un errore del software i cui risultati erano comunque stati accettati pedissequamente dal tecnico utilizzatore. Mentre un'altra volta scovai un difetto di programmazione in un software relativamente alla trasformata di Fourier. La ditta produttrice, statunitense, dopo le iniziali resistenze dovette ammettere l'errore, mi inviò quindi una copia corretta del software e mi pregò infine di non divulgare l'errore, considerato che erano state vendute decine di migliaia di copie in tutto il mondo.

Chiedo scusa per la digressione, ma mi sentivo in dovere di mettere in guardia i tecnici dall'uso indiscriminato dei software e inoltre, proprio per i motivi sopra esposti, di consigliare a quanti vogliano approfondire l'argomento di leggere l'Appendice B del libro e successivamente testi specialistici di complessità maggiore. Solo in questo modo possiamo essere in grado di valutare correttamente i nostri e gli altrui calcoli.

1.5 Introduzione allo studio delle isostatiche

Ritornando al nostro problema, poiché l'ho voluto banalizzare sin dall'inizio, penso che a questo punto siamo comunque in grado di calcolare lo stato tensionale nella muratura di cui alla fig. 1.15-B; di fatti nel nostro caso la tensione verticale è data da (con $z_0 = 0$; $z_1 = z$):

$$\sigma_z = \int_{z_0}^{z_1} \gamma_m dz = \gamma_m z \tag{1.46}$$

mentre per il calcolo della tensione orizzontale dobbiamo lavorare un poco con le equazioni (1.39A/B). A tal fine supponiamo che la muratura sia indeformata, dal momento che è soggetta al solo peso proprio; ciò impone la condizione che:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0 \tag{1.47}$$

da cui:

$$\sigma_x = \nu\sigma_y - \nu\sigma_z \tag{1.48a}$$

$$\sigma_y - \nu(\sigma_x - \sigma_z) = 0 \tag{1.48b}$$

Sostituendo la prima nella seconda otteniamo, con qualche manipolazione matematica:

$$\sigma_y = \sigma_z \frac{\nu}{(1-\nu)} \tag{1.49}$$

una relazione che ritroveremo anche nella Meccanica delle Terre brevemente descritta nel capitolo 4. Nel caso della muratura proposta e per $\nu = 0{,}20$, l'applicazione delle equazioni (1.46) e (1.49), per $z = 3/6/9$ m a partire dall'alto, comporta che la tensione verticale sia pari a – 54 / – 108 / – 162 kPa, mentre quella orizzontale a 13,5 / 27 / 41,25 kPa, utilizzando la convenzione che i carichi di compressione sono negativi mentre quelli di trazione positivi.

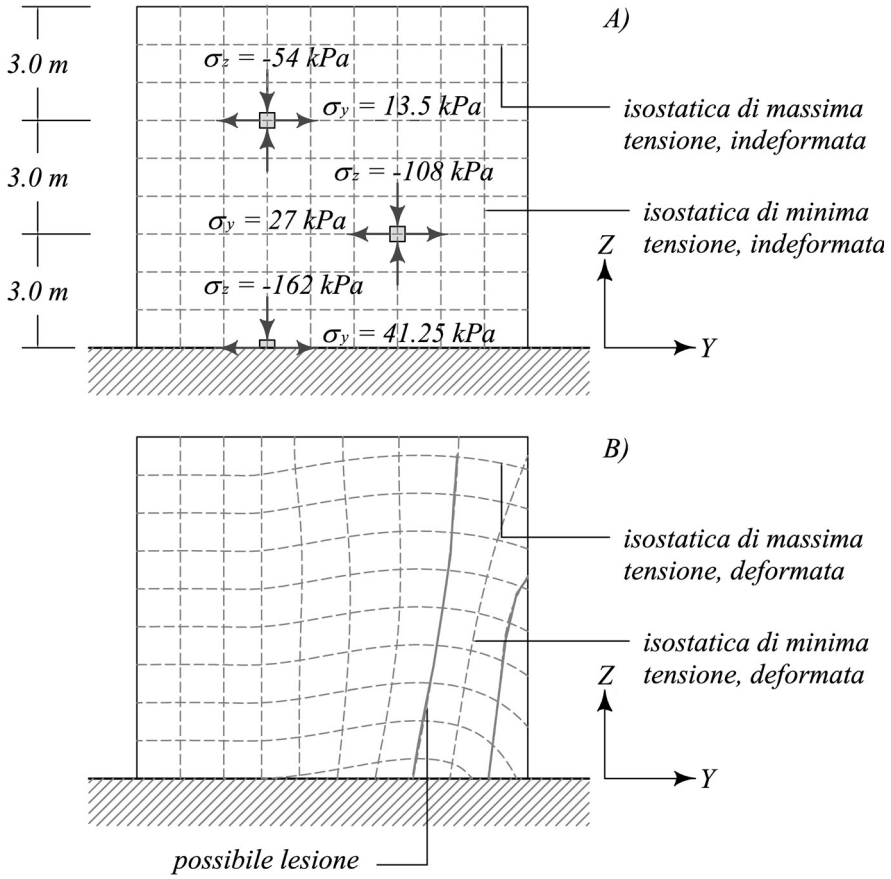

Figura 1.18 A) Quadro isostatico relativo al problema in esame rappresentato nella figura 1.15; B) geometria di possibili lesioni e relazione strutturale con il quadro isostatico: la lesione ricalca in genere l'andamento della isostatica di minima tensione.

I valori calcolati, alla luce di quanto finora introdotto, unitamente ad un approccio semi-quantitativo ed alla fig. 1.15-A, consentono di ricostruire lo stato tensionale della muratura e soprattutto il proprio quadro isostatico per la condizione di carico analizzata (fig. 1.18-A).

Ed in questo modo abbiamo finalmente dato una risposta ai concetti introdotti ai punti "1" e "2" riguardanti il calcolo dello stato tensionale nonché lo studio delle isostatiche di massima e minima tensione.

La metologia seguita è sostanzialmente semplice e consente, unitamente ad una visione concettuale del comportamento delle strutture o dei singoli elementi strutturali, di comprendere le fenomenologie in atto. Questo perchè la direzione dei vettori sforzo fornisce un modo utile di ricostruire il *quadro isostatico* il quale a sua volta può essere derivato da un ulteriore elemento di analisi che potremmo definire come *quadro delle traiettorie*, nel quale le linee tratteggiate non rappresentano lo stato tensionale bensì le *traiettorie delle tensioni principali*, un sistema veramente valido nello studio dei quadri fessurativi: e, come scopriremo nel proseguo del libro (capitolo 7), le lesioni hanno la

generale tendenza a seguire proprio i quadri isostatici. Disegnare le traiettorie e le isostatiche può essere veramente illuminante nell'analisi di un quadro fessurativo, perchè le prime possono essere pensate come le linee lungo le quali si verifica la trasmissione degli sforzi o delle forze da una molecola all'altra, mentre le seconde forniscono una (generalmente) diretta correlazione tra l'andamento di una lesione e la tensione principale mimina.

Il concetto può essere ulteriormente chiarito con il riesame degli schemi presenti nella fig. 1.16, nei quali le linee tratteggiate indicano la direzione del vettore spostamento; ma, poiché la rottura di un elemento prismatico avviene per azione di sforzi di trazione, ecco che le medesime linee risultano sostenere anche l'andamento della isostatica di massima tensione, mentre quella di minima tensione deve pertanto risultare costantemente ortogonale alla precedente, ottenendo, nel caso generale, due famiglie di curve tra di loro intersecantesi costantemente ad angoli retti (fig. 1.18-B). Il problema è comunque noto in Matematica con il termine di *traiettorie ortogonali*, un concetto di indubbio valore che si incontra in numerosi settori della Fisica e dell'Ingegneria, come nel caso dei campi elettrostatici, nei quali le linee di forza sono sempre ortogonali alla curve di potenziale costante, nell'aerodinamica, dove le linee di flusso rappresentano traiettore ortogonali alle curve di equipotenziali di velocità e infine nell'idraulica (capitolo 4), consentendo di ricostruire la rete idrodinamica formata da linee di flusso ortogonali alle linee equipotenziali.

Considerato l'importanza dell'argomento, che sarà ulteriormente approfondito ed utilizzato a partire dal capitolo 7, vorrei rimarcare la differenza concettuale esistente tra le traiettorie delle tensioni e le linee isostatiche, considerato che sostanzialmente queste ultime possono essere derivate dalle precedenti per semplice rotazione di 90° o, nota l'equazione generale che sostiene il calcolo delle tensioni principali di compressione e trazione, per semplice applicazione di una matrice di trasformazione per $\theta = 90°$, alla stregua di quanto già proposto con l'equazione (1.20).

Nel caso specifico della fig. 1.18-A le traiettorie delle tensioni costituiscono un reticolo ortogonale semplice, con la direzione delle tensioni principali massime orizzontale e quella delle tensioni principali minime verticali: ma cosa succede se introduciamo dei fori come nel caso della fig. 1.15-A? Ora che possiedamo tutte le cognizioni necessarie possiamo finalmente chiarire il concetto di cui al punto "3" relativo alla concentrazione degli sforzi, ma prima ritengo necessario fornire alcuni chiarimenti in merito al tracciamento diretto delle isostatiche, un metodo ampiamente utilizzato anche nella Meccanica delle Terre (sulla quale si fonda la Geotecnica) e che ritroveremo quindi nel capitolo 4.

1.6 Fattori di concentrazione dello sforzo

Il punto di partenza è dato ovviamente dal calcolo dello stato tensionale verticale ed orizzontale (rispettivamente tensioni principali massima e minima) che, per un parallelepipedo ed in assenza di fori, può essere eseguito direttamente lungo una verticale, in quanto rappresentativa della variazione dell'intero stato tensionale in funzione della retta di azione della gravità. Il passo successivo consiste nel riunire con la medesima curva (nel nostro caso una retta) tutti i punti caratterizzati dalla medesima tensione principale massima ottenendo pertanto una prima famiglia di isostatiche; il tracciamento della famiglia di curve relative alle tensioni principali minime risulta adesso una banale conseguenza, constatato il sopra citato principio di ortogonalità delle tensioni.

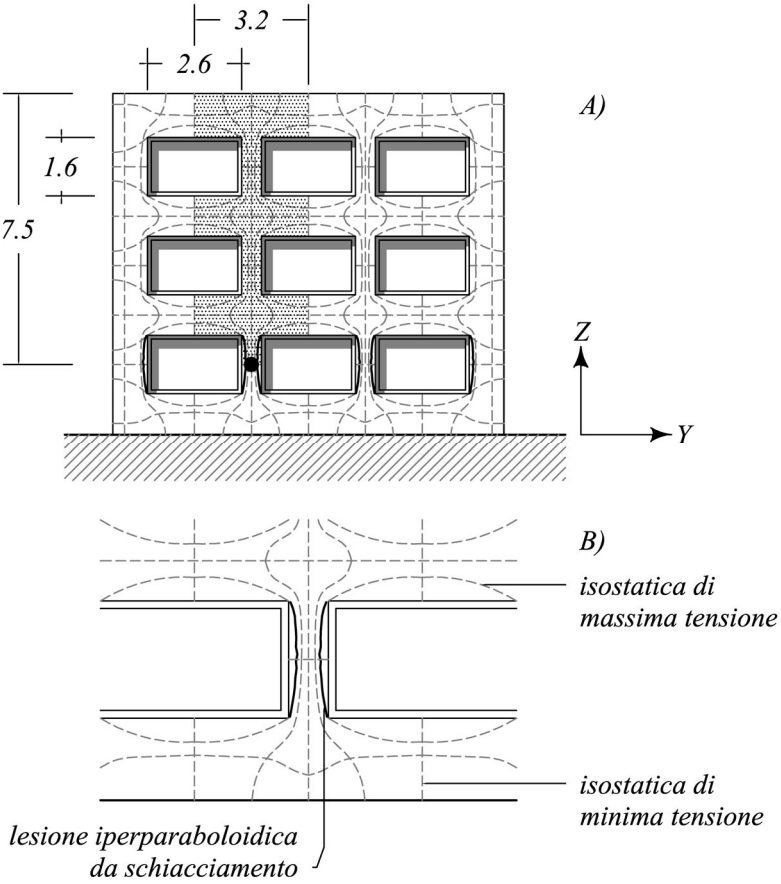

Figura 1.19 A) Andamento qualitativo del quadro isostatico relativo al caso analizzato nella *case history* 3 che, in presenza di aperture, subisce raffittimenti ai quali seguono fenomeni di concentrazione degli sforzi, gli stessi responsabili della comparsa di lesioni iperparaboloidiche da schiacciamento. B) Dettagli del quadro isostatico in prossimità di una apertura e possibile andamento qualitativo delle lesioni.

Nel capitolo 7 impareremo a padroneggiare con tale metodo, soprattutto da un punto di vista qualitativo, stante la sua indubbia validità nel relazionare la geometria delle lesioni con lo stato tensionale, questo ultimo a sua volta modificato dall'agente in atto che ha causato il dissesto; un metodo davvero efficace nell'analisi diretta dei quadri fessurativi e nella ricostruzione del/i cinematismo/i in atto.

Ritornando al discorso relativo agli effetti della presenza di un foro circolare in un materiale isotropo omogeneo, gli stessi furono calcolati per la prima volta dal tedesco G. Kirsch nel 1898 ed i suoi risultati evidenziarono come il foro aumentasse le tensioni di un fattore 3; un risultato veramente soprendente per le conoscenze dell'epoca allorquando numerose navi, pur dotate di fattori di sicurezza elevati, riuscivano, con mare burrascoso, a spezzarsi letteralmente in due o più tronconi e ad affondare.

Alcuni anni dopo, in occasione della ricostruzione della flotta russa a seguito della guerra contro il Giappone del 1905, il matematico russo G.V. Kolosoff calcolò gli effetti di un foro ellittico in una lamina, anche se tali risultati divennero di pubblico dominio solo nel 1913 ad opera dell'inglese C.E. Inglis il quale fornì la seguente equazione finale:

$$F_a = 1 + 2\sqrt{\frac{L}{r}} \tag{1.50}$$

secondo la quale la presenza di un foro ellittico di lunghezza 2 L aumenta la concentrazione degli sforzi di un fattore di amplificazione F_a che dipende sia da L che dal raggio di curvatura r dell'apice della fessura.

1.6.1 Rianalisi della case history 3

Applicando le conoscenze fin qui acquisite possiamo finalmente rispondere in maniera univoca ed esauriente all'architetto utilizzando la fig. 1.19, nella quale è evidente che la presenza di aperture costituisce una diminuzione della sezione resistente e quindi un aumento delle tensioni di compressione e trazione.

L'aumento può quindi essere visualizzato graficamente, dal momento che le isostatiche sono obbligate a curvarsi per seguire la presenza di materiale resistente e di conseguenza ad infittirsi, ragion per cui gli sforzi devono necessariamente aumentare; oppure possono essere calcolate con l'ausilio dell'equazione (1.1). Di fatti la zona puntinata della fig. 1.19-A rappresenta i settori strutturali preposti alla trasmissione dei carichi verticali tale che nel punto indicato dal nodo il peso della struttura è di 97,92 kN. Ma poiché l'area resistente è di soli 0,24 m^2 la tensione di compressione risulta essere pari a 408 kPa. Il valore calcolato è quindi 3 volte superiore a quello corrispondente in assenza di aperture e sinceramente è solo un caso che converga con i risultati di Kirsch. Ovviamente, pur con il fattore di concentrazione degli sforzi, non siamo ancora in grado di spiegare la presenza delle lesioni, considerato che abbiamo analizzato la struttura sotto una condizione di carico dettata dal solo peso proprio. Ma nel momento in cui, per esempio, aggiungiamo la presenza di tre solai (di larghezza di 7,6 metri), di peso di 5 kN/m^2 tra peso proprio e carichi permanenti, ecco che P al nodo aumenta al valore di 280,32 kN [(7,6/2 × 3.2 × 5 × 3) + 97,92], mentre la tensione di compressione sale a 1168 kPa.

Ma se anche in tal caso la struttura possedeva un fattore di sicurezza rispetto alla rottura di 8,56 (10.000/1168), ordunque come potette lesionarsi la muratura? Non restò che rompere l'intonaco per analizzare nel dettaglio la muratura e fu solo così che riuscii a scoprire la verità. L'impresa di costruzione, forse per imperizia dei propri muratori per la verità tutti molto giovani, aveva posizionato i mattoni forati con il momento di inerzia (nota 1.6) ruotato. E la cosa sbalorditiva è che ciò era avvenuto solo nei settori murari compresi tra le aperture dove la dimensione orizzontale era un multiplo della larghezza del mattone. Una vera furbizia. L'esecuzione di prove di carico, fino al raggiungimento delle condizioni di rottura, eseguite in un laboratorio specializzato dimostrò infine come il carico limite del mattone ruotato diminuisse di un fattore 8,5, risultando di conseguenza pari a circa 1200 kPa. Una vera sfortuna per l'appaltatore che dovette risarcire i danni materiali ed anche quelli morali al proprietario dell'edificio. E pagare tutte le spese processuali, me compreso.

Rimane un solo elemento da chiarire: la direzione delle lesioni. Come abbiamo già visto nell'introduzione una lesione è sostanzialmente il prodotto della separazione di un materiale originariamente continuo, ad opera di sforzi di trazione. Ma nel caso trattato tali sforzi risultano essere particolamente intensi nei settori strutturali compresi tra le aperture,

come evidenziato dalla fig. 1.19-B che rappresenta un ingrandimento della fig. 1.19-A. In essi la diminuzione della sezione resistente induce un raffittimento delle traiettorie delle tensioni (o delle isostatiche delle tensioni) e conseguenzialmente un aumento delle tensioni sia di compressione che di trazione. Ma allora la logica conseguenza è che le lesioni devono necessariamente seguire la traiettoria di massima compressione risultando di conseguenza ortogonali alle traiettorie di massima trazione; oppure ragionando in termini di isostatiche le lesioni devono coincidere (salvo cari particolari) con la famiglia di curve pertinenti alla tensione principale minima.

Una relazione, quella tra l'andamento delle lesioni e le traiettorie delle tensioni principali, che approfondiremo nel capitolo 7, nel quale scopriremo come l'analisi delle strutture deformate possa essere convenientemente eseguita mediante metodi basati su tali concetti.

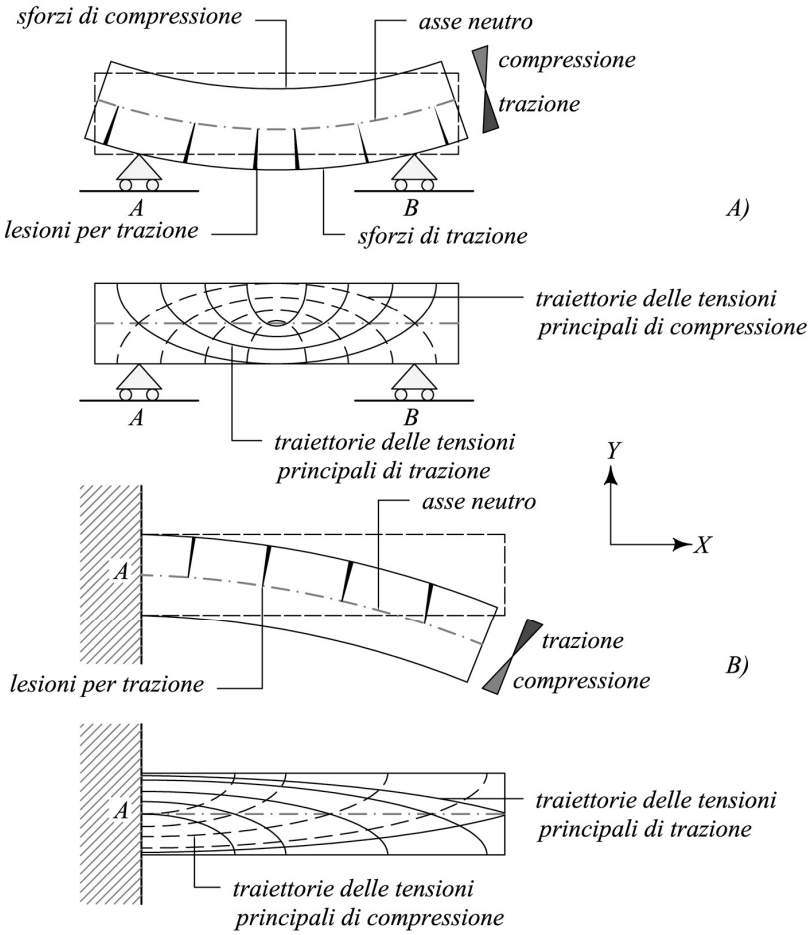

Figura 1.20 Analisi del comportamento statico delle travi inflesse: A) traiettorie delle tensioni principali relative ad una trave isostatica; B) traiettorie delle tensioni principali in una mensola. La geometria e la posizione delle lesioni risultano funzione degli sforzi da trazione, con una forma tipicamente triangolare con massima apertura presso le fibre maggiormente tese.

1.7 Schemi statici di riferimento

Ora che siamo in possesso di numerose informazioni riguardo il comportamento di alcuni elementi strutturali, dei vari modi di assemblaggio e dell'influenza delle diverse condizioni di vincolo adottabili, possiamo finalmente approfondire la membratura che più di ogni altra ci sarà utile per la ricostruzione dei quadri fessurativi e la comprensione dei cinematismi in atto: la trave, nelle sue diverse condizioni di vincolo. E lo faremo, utilizzando il concetto di traiettorie delle tensioni principali, con l'ausilio della fig. 1.20 nella quale analizzeremo le travi semplicemente appoggiate e le travi a mensola, mentre quelle a doppio incastro saranno introdotte e brevemente discusse in altre sezioni del libro.

Abbiamo già visto che il primo scienziato ad occuparsi delle travi fu Galileo Galilei, il quale si interessò del comportamento delle mensole incastrate, mentre solo con Parent e Coulomb fu pienamente compreso il comportamento generale delle travi inflesse. Dobbiamo a loro la comprensione che in una trave, qualunque siano le condizioni di vincolo, coesistono sempre due stati di sforzo, di trazione e di compressione, in funzione della modalità di deformazione. Per cui in una trave semplicemente appoggiata l'insieme del peso proprio e dei carichi esterni comporta un'inflessione come rappresentata nella figura di sinistra, con presenza di sforzi di trazione massimi all'intradosso (lato inferiore) e sforzi di compressione massimi all'estradosso (lato superiore). Tale particolare condizione di sforzo implica però due assunti fondamentali:

1) In una trave il cui materiale obbedisce alla legge di Hooke, l'intensità dei due stati di sforzo deve variare con legge lineare nel piano della sezione trasversale; ciò implica allora che deve necessariamente esistere un piano ad essa ortogonale dove le compressioni e le trazioni si annullano e l'intersezione di tale piano con la sezione verticale della trave viene definita asse neutro. Il termine è chiaramente riferito all'assenza di stati di sforzo di compressione e trazione ma non di taglio, un argomento che affronteremo successivamente.
2) Il superamento della resistenza a trazione del materiale comporta lo sviluppo di lesioni a geometria triangolare ubicate all'intradosso della trave (settore di massima trazione) e il cui vertice risulta posizionato, per modeste deformazioni, proprio sull'asse neutro (fig. I.7). Una relazione causa-effetto che sarà molto utile nella trattazione di alcune problematiche che, relative a casi reali, affronteremo successivamente, considerato però che all'aumentare della curvatura per flessione si ha un progressivo spostamento dell'asse neutro verso l'interfaccia di massima compressione (nel nostro caso verso l'estradosso) con la conseguente propagazione della fessura, fino alla rottura ultima.

1.7.1 Travi appoggiate e mensole

La geometria di una trave ha rappresentato nel corso dell'evoluzione delle costruzioni la seconda forma strutturale elementare. In effetti se il pilastro costituisce la prima forma elementare, in virtù della constatazione che il naturale percorso dei carichi segue la forza di gravità, la trave di fatto è il primo elemento strutturale artificiale, appositamente pensato per la costruzione dei primi ripari dalle intemperie e dalle cadute accidentali dei pesi. Il posizionamento di elementi lapidei verticali ed orizzontali, a costruire il sistema trilitico primitivo, comportò la scoperta occasionale dell'appoggio semplice, mentre la costruzione di sistemi a più livelli condusse gli antichi alla realizzazione involontaria di condizioni di vincolo più evolute e complesse (fig. 1.21-A).

In ogni caso, lo sviluppo e la trasformazione nel tempo delle travi è stato sostanzialmente influenzato dalla ricerca di materiali artificiali, capaci di fornire una maggiore condizione di sicurezza nei confronti degli sforzi di trazione. Fino a quando, con la scoperta del cemento e la possibilità di realizzare strutture in calcestruzzo armato, le travi hanno raggiunto la piena maturità concettuale ed esecutiva grazie all'oculata distribuzione degli sforzi tra i due materiali: compressione per il calcestruzzo e trazione per l'acciaio.

In genere le travi vengono classificate sulla base del tipo di vincolo e delle modalità di localizzazione e trasferimento dei carichi il che conduce all'analisi delle mensole, un tipo particolare di trave dotato di un'estremità incastrata e l'altro libero ma soggetto ai carichi (fig. 1.20-B). Ma se l'utilizzo della mensola da parte dell'uomo ha seguito un percorso lento durato secoli e completato con la scoperta del calcestruzzo armato, la natura ha sempre fatto pieno uso di tale tipologia strutturale, dal momento che tutte le piante si comportano a mensola, talora dotate di sistemi di contrafforti alla base capaci di contrastare gli effetti flessionali legati per esempio all'azione del vento (fig. 1.21-B). Ma in realtà anche il regno animale rappresenta un valido utilizzatore delle mensole, come nel caso delle corna, zanne, artigli, braccia, gambe e dita.

In una mensola l'esistenza di un vincolo ad incastro implica che qualunque condizione di carico determina una inflessione della trave con lo spostamento massimo ubicato presso l'estremo libero, con una modalità che scopriremo in dettaglio nel capitolo 9. Per il momento sia sufficiente comprendere che, con modalità analoghe alla trave semplicemente appoggiata, esistono sempre due stati di sforzo, con la differenza sostanziale che le posizioni della massima compressione e della massima trazione risultano essere invertite. E di conseguenza è invertita anche l'ubicazione, ma non la geometria, delle eventuali lesioni per il superamento della soglia di snervamento a trazione.

1.8 Conclusioni

Il capitolo sullo studio delle strutture e dei materiali è servito per introdurre il lettore alle modalità di comportamento sia di singoli elementi che dei loro possibili assemblaggi in funzione dei tipi di vincoli e delle condizioni di carico, queste ultime a loro volta dipendenti dalle forze esterne applicate che possono essere concentrate, assumere una distribuzione generalmente lineare ed in ogni caso comunque orientate. Nel contempo la storia dell'evoluzione delle strutture ci ha permesso di capire quello che può essere definito come il concetto fondamentale dell'analisi strutturale: lo stato di sforzo in un mezzo continuo.

Eppure nel proseguo del libro non utilizzeremo mai tali concetti se non rappresentati attraverso lo studio e la graficizzazione delle traiettorie delle tensioni principali o dei quadri isostatici, mezzi concettualmente avanzati che consentono di visualizzare quasi con immediatezza gli effetti di uno stato di crisi in una struttura e, qualora possibile, di individuare anche le relative cause.

Nel contempo abbiamo solo sfiorato il concetto di deformazione e spostamenti eppure esso costituisce il tema dominante dell'intero libro poiché, come abbiamo scoperto nell'Introduzione, l'analisi dei quadri fessurativi risulta vantaggiosa se si opera in termini di spostamenti piuttosto che di forze o di sforzi. In definitiva i concetti introdotti avranno, con l'ausilio delle informazioni che scaturiranno dai prossimi capitoli, lo scopo di insegnare ad analizzare i quadri fessurativi, di calcolare, seppur in maniera semiquantitativa, il campo degli spostamenti ed infine, qualora possibile, di stabilire la relazione causa-effetto.

La costruzione di edifici e strutture, che siano residenziali, commerciali o destinate al trasporto, sta subendo una profonda mutazione derivante dall'aumento troppo spesso in-

controllato dei costi e dalla conseguente introduzione di muove tecnologie e di materiali prestazionali al fine di mantenere l'attuale livello di crescita economica. Purtroppo la contropartita nel breve periodo sarà insita proprio nella estremizzazione tecnologica, basata sulle innovazioni non sempre verificate sul campo e che condurrà inevitabilmente ad una serie di nuove problematiche che devono ancora essere scoperte ed affrontate. La crescita parabolica del Novecento in campo industriale ed edile condurrà nei prossimi decenni al termine della fase relativa alla Rivoluzione Industriale e tra pochi anni cominceremo a descrivere il periodo trascorso come quello dell'Età dell'Acciaio.

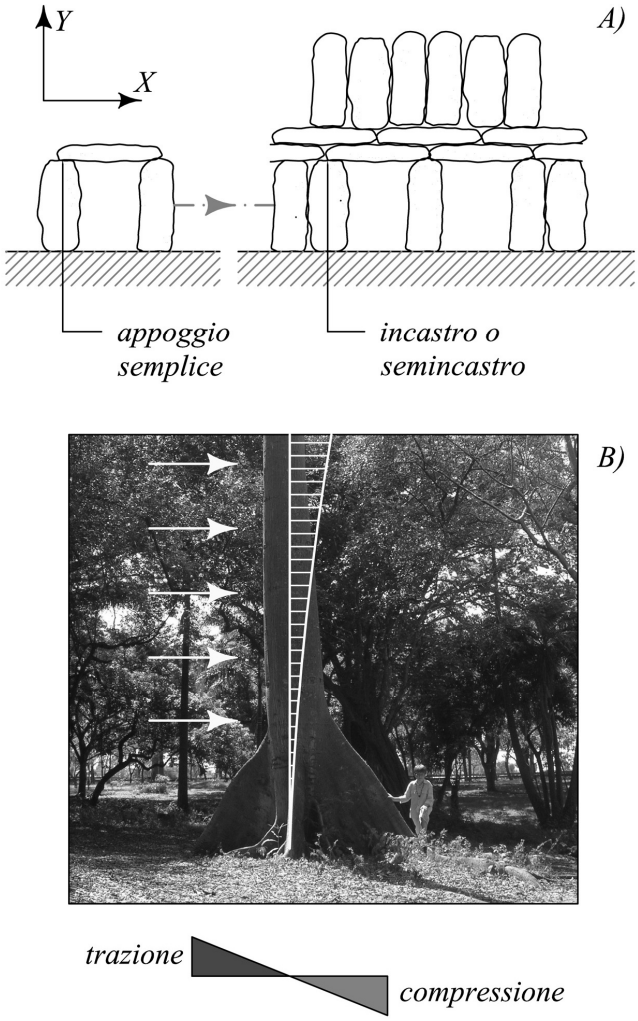

Figura 1.21 a) Evoluzione delle condizioni di vincolo in relazione ai primi tentativi di assemblaggio delle strutture primitive; b) comportamento a mensola degli alberi.